изворно

7.НИКОЛИЋ,Атанасије

ЕЛЕМЕНТАРНА ГЕОМЕТРИÛY : устроена за употребленⅡе слишателу фⅡлософⅡе у лⅡцеуму Кнужества СербⅡе / од■ АтанасⅡу Николића. – у Б🕓ограду : при ТипографⅡи Кнужества СербⅡе, 1841. - ✎12⌫, 215 стр. + ✎5⌫ прил.

Новаковић 1067; Кириловић 982; КНБС 1732; Панковић 1045.
Власништво: Историјски архив Пожаревац.

пребачено

7.НИКОЛИЋ,Атанасије

ЕЛЕМЕНТАРНА ГЕОМЕТРИІЯ : устроена за употребленіе слишателя філософіе у ліцеуму Княжества Сербіе / одъ Атанасія Николића. – у Бѣограду : при Типографіи Княжества Сербіе, 1841. - [12], 215 стр. + [5] прил.

Новаковић 1067; Кириловић 982; КНБС 1732; Панковић 1045.
Власништво: Историјски архив Пожаревац.
5569

ЕЛЕМЕНТАРНА
ГЕОМЕТРІЯ.

УСТРОЕНА

ЗА

УПОТРЕБЛЕНІЕ

СЛИШАТЕЛЯ ФІЛОСОФІЕ

У

ЛЍЦЕУМУ КНЯЖЕСТВА СЕРБІЕ,

одъ

АТАНАСІЯ НІКОЛИЋА,

Діпломатіческогъ Землѣмѣра, редовногъ Професора Математіке,
Землѣмѣрія и Начертанія и Сеніора у истомъ заведенію.

У БѢОГРАДУ,

ПРИ ТИПОГРАФІИ КНЯЖЕСТВА СЕРБІЕ.

1841.

Нѣговой Свѣтлости

МИХАИЛУ М. ОБРЕНОВИЋУ,

КНЯЗУ СЕРБІЄ,

Милостивѣйшемъ Господару

съ найдубльимъ страхопочитаніємъ

посвећуе

Издатель.

ВАША СВѢТЛОСТЬ,

МИЛОСТИВѢЙШІЙ ГОСПОДАРУ!

Щедра укрѣпленія, съ коима є СВѢТЛОСТЬ ВАША одма при почетку владѣтельства СВОГА при снисходителномъ посѣћенію овогъ школскогъ заведенія учеће у истомъ младежь Србску къ прилѣжанію ободрити милостивѣйше благоизволила, побуђую у мени найнѣжнія чувства благодарности. Но чиме бы я болѣ благодарности знаке показати могао, него точнымъ испуняванѣмъ свете дужности моє, коє ВАША СВѢТЛОСТЬ, као покровитель высоки у отечеству Наука праведно одъ мене очекує. Да бы дакле я томъ очекиваню што совершеніє удовлетворити, и Математіческе науке младежи Србской точніе предавати могао, поитіо самъ ову Елементарну Геометрію по потребама и обстоятелствама овога школскогъ заведенія сочинити и издати.

Высочайша милость ова, съ коіомъ е **ВАША СВѢТЛОСТЬ** дозволити благоизволила, да я ову прву на нашемъ езыку Геометрію **ВАШОЙ СВѢТЛОСТИ** посветити могу, служиће младежи Србской на поощреніе и прилѣжаніе, а мени, као наставнику нъіовомъ на ободреніе точногъ испуниванія дужностій моій; а то ће быти средство, коимъ ће отечество къ пожеланой цѣли приспѣти. Благо отечеству! кое таковогъ Владѣтеля има, коій воспитаніе и наставленіе младежи отечествене, као найважніе и найтврђе народнѣ среће основе не само уважава, но и щедро укрѣплява, подпомаже, разпространява, сва сходна средства къ болѣмъ и лакшемъ набавляню нъіовомъ подаѥ, Бібліотеку заведенія умножава, художества подиже, и све што се благостоянія рода и отечества тиче, заводи, узвышава и награђуѥ само зато, да бы способне отечеству грађане умножіо.

За срећна дакле праведно цѣнимъ себе, што ме ѥ провидѣніе такове славе удостоило, да я ову на нашемъ ѥзыку прву Геометрію именомъ **СВѢТЛОСТИ ВАШЕ** украсити могу. Нека зна потомство, да Ономе за добыть ове науке на матернѣмъ ѥзыку благодарити има, подъ Когъ ѥ покровителствомъ она тако свесрдно воздѣлавана была; нека зна садашньости и старо и младо, да за такова щедра Владѣтеля и любителя народнѣгъ просвештенія найискренніомъ подчиненія любовію валя да непрестаѥ Бога молити, да ГА као такова, здрава до найдублѣ старости СВОЄ, на утѣху, радость и іоштъ болю надежду цѣлогъ Србства, у изобилію обштегъ благостоянія славити може.

Подносећи ово дѣло, и препоручуюћисе высочайшой милости и благонаклоности Княжеской, остаємъ съ найдубльимъ страхопочитаніємъ

ВАШЕ СВѢТЛОСТИ

У Крагуевцу,

1. Септемврія 1840.

покорнѣйшій слуга

Атанасій Николићъ.

ПРЕДГОВОРЪ.

ЛЮБЕЗНЫЙ ЧИТАТЕЛЮ!

Да бы се ова превиспрена наука што точніе у овомъ Княжества Сербіе школскомъ заведенію предавати могла, нуждно ми е было часъ пре такову кньигу за наставленіе сочинити, коя ће слушательима моима доста ясна и понятна, ньіовымъ предуготовленіяма соразмѣрна, а намѣри овога заведенія соотвѣтствуюћа быти; дакле по обстоятелствама овы' очекиваня, морао самь међутымъ по могућству сила моій ова основанія Геометріе сочинити и издати.

При сочиненію овога дѣла мое е главно намѣренѣ было, да оно за мое слушателѣ што понятніе изиђе, а обширность морао самь по обстоятелствама за предаванѣ прописаногъ (полгодишнѣгъ теченія) времена, наблюдавати, и у толико се у єдикоимъ предметима упуштати, колико е за совершено предаванѣ Физике и за практическо Землѣмѣріе нуждно. Далѣ по желѣи Высокославногъ Попечител-

ства Просвѣщенія трудіо самь се по возможности сила моій Математическа израженія и разна наименованія на Србски превести. По времену зарь ћу я, или другій кои болѣ и исправніе ову науку моћи издати, но мени ће а и свакомь другомь лакше одсадь быти ову већь постоећу и као прву на нашемь матернѣмь езику дотеривати и поправляти, него изь нова безь сваке помоћи ковати и склапати. Зато, пошто сваку стварь можемо добрымь и злымь очима гледати, и ты ово дѣло гледай са оньімь усердіемь, сь коимь самь се я трудіо, да по могућству сила моій жельи Высокославногь Попечителства Просвѣщенія, потребама овога Заведенія, и изображенію миле ми Србске младежи притечемь и одговоримь. Тако дакле маленкости Грамматическе (кое ми ніе посао) презирући, преводь Математическы' израженія времену усовершенствованія ради оставляюћи, гледай изложенія и наставленія Математическа (као стварь), есул' уредно, понятно, и цѣли сходно изложена, пакь ћешь ми труде мое оправдати.

У Крагуевцу,

1. Септемврія 1840.

СОЧИНИТЕЛЬ.

СОДРЖАНІЕ.

ОДДѢЛЕНІЄ ДРУГО.

ТРИГОНОМЕТРІЯ ПОВРШНА.

Страна.

ОДДѢЛЕНІЄ ТРЕЋЕ.

СТЕРЕОМЕТРІЯ.

УВОДЪ.

РАЗНА ИЗЯСНЕНІЯ ЗЕМЛѢМѢРІЯ И ОСНОВАТЕЛНА ПРАВИЛА.

1.

Геометрія, Землѣмѣріе (γεα земля, и μετρεω мѣримъ), зовесе наука, коя учи количества соединѣна непресѣчна мѣрити.

Слѣдство. Дакле она часть науке количества или Маѳематіке, коя просторна или соединѣна количества т. е. линіе, површности и тѣла испытуе, зовесе *Землѣмѣріе, Геометрія*.

2.

Землѣмѣріе се дѣли обично на *Планиметрію* (површно землѣмѣріе, т. е. мѣренѣ површности) и *Стереометрію* (мѣренѣ разны' тѣла), и разумевасе подъ онымъ наука линія и површностій, а подъ овымъ наука мѣрення тѣла.

Іошть се далѣ у предаваню додае къ првой науцы *Тригонометрія* (Триугломѣріе) *површна*, а къ другой *Тригонометрія шарна* (Тригонометрія сферическа). И мы ћемо овде I. *Планиметрію* II. *Тригонометрію површну* и III. *Стереометрію* учити, а Тригонометрію сферическу, као за астрономе нуждну, збогъ краткости у предаваню прописаногъ времена изоставити.

3.

Неизмѣрима шупльина, коя насъ и све ово што мы нашыма чувствама примѣчавамо, окружава, зовесе *просторъ*, (extensio). Просторъ се разширує на разна управленія или размѣре: у дужину, ширину, и у высину или дубльину; и то онъ є у свыма овыма трыма управленіяма *неограниченъ*. *И зато є просторъ едно неограничено цѣло.*

4.

Свака є часть овогъ неограниченогъ простора *тѣло* (corpus). И оно се простире у ширину, дужину и высину, но є са свію страна ограничено. *Тѣло є дакле са свію страна ограниченый просторъ.* Части су тѣла опетъ тѣла. А оно ограничено мѣсто, кое нѣко тѣло у овомъ простору заузима, зовесе *запремина*, (volumen).

5.

Оно, што тѣло одъ прочегъ простора оддѣлює, или оно, где тѣло нѣко престає, или на кратко, граница тѣла зовесе *површность*, *површина* (superficies).

6.

Границе површности зовусе *лініє* (linea). Лінія се само по едномъ управленію простире, т. е. само у дужину. Лінія као разширенѣ по *едномъ* управленію помышлѣна, или є ограничена или неограничена. Части лініє опетъ су лініє.

7.

Граница лініє зовесе *точка* (punctum). Точка нема запремине, слѣдователно ни частій. Свака лінія има две граничне точке, *почетну* и *конечну точку*. Какогодъ што се тѣло изъ површностій, а површность изъ лінія несостои, тако исто и лінія несостоисе изъ точкій; но у свакомъ тѣлу можемо површине, у свакой површини лініє, у свакой лініи точке узети, ерь можемо тѣла, површине, лініє свршавајућесе помыслити, гди ођемо.

Точка є означеніє, коя частій и тѣла нема. Запремина Маѳематіческе точке равна є нулли, но за учинити ю за наша чувства примѣтителну, морамо се задоволѣити, да нѣно мѣсто на постоянномъ предмѣту са видимымъ трагомъ назначимо, коя опетъ зато, што є видима, неће быти точка Маѳематіческа, али се за такову узети може, кадъ себи вообразимо, да се границе овога трага све выше и выше саужавају, докъ не изчезну, и у магновенію ньіовы изчезаваня право мѣсто Маѳематіческе точке у простору назначавaю.

Мы ћемо у напредакъ свагда Маѳематіческу точку разумѣвати.

8.

Да помыслимо да се една точка у простору
фіг. 1. съ едногъ мѣста *А* на друго *Б* (фіг. 1.) движе, и да трагъ по учинѣномъ путу после себе заоставля, трагъ се овай зове *Маѳематіческа лінія.* И будући да Маѳематіческа точка нити има мѣстишта, нити раширине, зато *Маѳематіческа лінія ништа друго ніе, него движеніемъ едне точке у простору написаный путъ.*

9.

Све што се простире, дакле изъ частій состои, или што се представити може, да се изъ частій состои, зовесе *количество.* Тѣла, површности и лініе су дакле количества, но точка ніе количество. Ова тры просторна количества зовусе *соединѣна*, што су ньіове части точно соединѣне и скопчане, да се међу собомъ разликовати не могу.

10.

Союжены́й редъ при предаваню наука зовесе *начинъ) наставленія* methodus); а овай наставленія начинъ, кои є при предаваню Маѳематічески' наука заведенъ, и кои се употреблявати има, зовесе *Маѳематіческій начинъ предаваня* или *меѳодъ Маѳематіческій* (methodus mathematica), кои ћемо и мы овде узети. А овай се меѳодъ состои изъ слѣдуюћи' частій.

Изясненіе, *описаніе* (definitio) зовесе ясно и опредѣлено понятіе предмѣта съ речма изражено.

Основателна правила (axioma) есу такова изреченія, кои' є истина тако ясна по себи, да противорѣчія нетрпи, слѣдователно потврждень изяснѣне истине тако є ясно, да никаквога доказателства нетреба. Н. п. цѣло є веће одъ свое части.

Наставленіе (theorema) зовесе оно изреченіе, кое се безъ доказателства узети не може. Но истина овога изреченія изъ основателны' правила изслѣдити и доказатисе има. Дакле *є наставленіе изслѣдованіе основателны' правила.*

Задатакъ (problema) зовесе оно изреченіе, коимъ се иште, да се нешто изъ задаты' изнаћи, и таковогъ изнађеногъ се точность доказати има. — Основателна правила и наставленія есу ѳеоретіческа, а задатцы практическа изреченія, коя у Геометріи употребленіе леньира и шестара предпоставляю.

Доказателство (demonstratio) є союзъ выше изреченія, кои' се точность на изясненіяма, на основателнымъ правилама и већъ доказанымъ изреченіама оснива.

Къ управленію Геометрически доказателства често нуждно є начертаніє лінія, фигура и тѣла, она посредствую доказателство, и зовусе *помоћне лініє*, *помоћне фігуре* и проч., и дѣло нъіовогъ начертанія, зовесе *сочиненіє* (constructio).

Предпоставляня (hypotheses) зовусе она изреченія, при коима се у смотренію основателности доказателства и прочи истина равнодушно гледи, коимъ се начиномъ она определити имаю, и коя при доказателствама за основъ узетисе не могу.

Слѣдства (corollaria) содржавају потврждения, кои точность изъ предидућій изреченія (изясненія, наставленія, задатка) лакимъ и понятнымъ начиномъ слѣдує.

11.

Основателна правила.

1. Свако є количество себи самомъ равно.

2. Цѣло є веће одъ сваке свое части, или свака є часть маня одъ свога цѣлогъ.

3. Цѣло є свыма своима частима совокупныма равно; и тако се могу свагда на мѣсто цѣлога све нѣгове части, а на мѣсто свію частій цѣло поставити. Дакле се равно на мѣсто равны поставити може.

4. Количества, коя су некомъ трећемъ и ономъ истомъ равна или подобна, она су и међу собомъ равна или подобна, т. е. едно другомъ.

5. Коя су подобна некомъ трећемъ количеству, подобна су такођеръ и међу собомъ.

6. Ако су два количества међусобна равна, равне су и све части совокупне еднога количества свыма частима совокупныма другога количества.

7. Равна количества, къ равнымъ додата, одъ равны' отузета, са равныма умножена, чрезъ равна раздѣлѣна, даю равне сумме, разлике, производе, количнике.

8. Неравна, остаю неравна, ако се или собращіемъ увеличаю, или отятіемъ умале, или се умноже, или раздѣле.

9. Ако е одъ два количества едно веће одъ другога, и нѣгова е пола већа одъ половине другога.

10. Количества, коя се едно на друго положена слажу, и точно поклапаю, равна су у оныма, у коима се точно поклапаю.

11. Равна се у мѣсто равны' поставити могу.

ОДДѢЛЕНІЄ ПРВО.

ПЛАНИМЕТРІЯ.

(Землѣмѣріє поврщно).

ГЛАВА ПРВА.

О СВОЙСТВАМА ЛІНІЯ, О СВОЙСТВАМА ПРАВЫ ЛІНІЯ У СМОТРЕНІЮ ЊЫОВЫ МЕЂУСОБНЫ ПОЛОЖЕНІЯ, И О УГЛОВИМА ВООБШТЕ.

12.

Изясненіє. *Лінія* є количество, коя просторъ у дужину има. (§ 6.)

За означеніє лінія употреблююсе велика азбучна писмена, одъ кои єдно се при почетку, а друго при свршетку нѣномъ поставля; а често гди се двоозначеніє избећи може, свободно намъ стои и са єднимъ назначити.

13.

Изяснен. *Права лінія* (linea recta) зове се она, коя све свое части у едномъ управленію лежеће има, као фіг. 1. лінія *АБ*. *ф. 1.*

14.

Слѣдства. 1. Будућя да се при правымъ лініяма са изятіемъ нѣне дужине, друго свойство, осимъ управленія ньовы изразити не може, слѣдуе: *да су све праве лініе међусобно подобне.*

2. Праве лініе, кое су међусобно равне, слажу се.

3. Одъ едне задате точке къ другой права се лінія повући може.

15.

Основат. правило. Међу две точке само е една едина права возможна.

16.

Слѣдства. 1. Права лінія е найкраћій путъ међу две точке, а свака крива или скучена лінія међу исте две точке дужа е.

2. Две точке опредѣлюю станѣ, положеніе и управленіе праве лініе.

3. Ако се права лінія преко ове две точке не сматра да се далѣ продужуе, то опе опредѣлюю не само нѣно *станѣ*, него и нѣну *величину*.

4. Права лінія точно изражава отстояніе међусобно две точке.

17.

Изяснен. Све оне лініе, кое нису праве, и одъ кои̓ поедине части у ономъ истомъ управленію не стое, зовусе *криве лініе*, фіг. 2. лі-
ф. 2. нія *ГД*.

Лінія, коя се состои изъ выше у разномъ управленію правы̓ лінія *АБ, БВ, ВГ, ГД, ДЕ*,
ф. 3. фіг. 3. зовесе *скутена*.

Она лінія, коя се изъ правы̓, и кривы̓ сою-
ф. 4. жена состои, зовесе *мешавита лінія*, фіг. 4. *АБ, БВ, ВГ, ГД*.

18.

Изяснен. *Лініе равнотекуће* (parallelae) зовусе оне, кое ма безконечно продужене у непремѣнномъ међусобномъ отстоянію теку, као у фіг.
ф. 5. 5. *АБ* и *АВ*.

Равнотекуће или равноотстоеће положеніе едне лініе къ другой назначавасе са овымъ међу обема лініяма поставлѣнымъ знакомъ (#). Тако се зове у фіг. 5. *АБ* # *ВГ*, *АБ* равнотекућа са *ВГ*.

19.

Изяснен. Оне праве на едной површини равной наодећесе лініе, кое нису равнотекуће, кадъ бы се на обе стране продужиле, одъ оне стране одъ кое бы се саставляле, зову се *саставляюће се* (convergentes) и точка она, гди бы се удариле и пресекле, *точка пресецаня*; а одъ оне стране, одъ кое бы се све већма и већма разилазиле, *разставляюћесе лініе* (divergentes). Тако су у фиг. 6. лініе *АБ* и *ВГ* одъ *Х* саставляюћесе, и *Х* точка пресѣцаня, а одъ *К* разставляюћесе. *ф.* 6.

20.

Изяснен. *Окружна лінія* или *окружіе* (peripheria) фиг. 7. е една у себе саму повраћаюћасе крива лінія, тога свойства, да све нѣне точке *АБВГА* одъ едне унутри наодећесе точке *С* еднако отстое. Ова важна унутри наодећасе точка *С* зовесе *средоточіе* (centrum). *ф.* 7.

Полупречникъ, зрачацъ (radius) зове се она, одъ ма кое точке окружія до средоточія, повучена права линія. Тако су полупречници *АС*, *БС*, *ВС*, *ГС*.

Пречникъ или *прекомѣрникъ* (diameter) зовесе свака чрезъ средоточіе повучена и одъ окружне лініе двапутъ ограничена права лінія, као *АВ*, *БГ*.

Тетивка (chorda) зовесе она одъ едне точке окружне лініе до друге у ономъ истомъ окружію повучена права лінія. Тако е *АБ* тетивка.

Лукъ (arcus) зовесе свака частъ окружне лініе. Тако е *АБ*, *БВ*, *ВГ*, *ГА*, лукъ окружія.

21.

Слѣд. 1. Сви су полупречницы єдногъ и оногъ истогъ окружiя или лука међусобно равни.

2. Сви су пречници єдногъ и оногъ истогъ окружiя међусобно равни; єръ свакiй пречникъ состоисе изъ два полупречника, а ови су међу собомъ равни, дакле и они су равни.

22.

Изяснен. Окружна лiнiя дѣлисе на 360 равны' частiй, коє *степене* (gradus) зовемо. Свакiй степенъ опеть дѣлисе на 60 равны' частiй, коє *мiнуте*, а свака мiнута опеть на 60, коє *секунде* зовемо.

Дакле є лукъ одъ	90	степенiй	една	четврть		окружне лiнiє
„ „ „ „	180.	„	„	пола		
„ „ „ „	60.	„	„	шест. часть		
„ „ „ „	45.	„	„	осма	„	

и т. д.

23.

Слѣд. Ако є дакле число степенiй, минута и проч. задато, то само треба намъ 360 чрезъ ово число задато раздѣлити, и сотымъ ћемо дознати, коя є часть окружне лiнiє задатый лукъ.

Степени се назначаваю са ^{0}, мiнуте са $'$, а секунде са $''$. Као 24^{0}, $2'$, $5''$.

24.

Изяснен. *Површина* (superficies) є количество, кое се простире у дужину и ширину. Површине се дѣле на *равне* и *криве* површине.

Равна површина, или *равница* зовесе она површина, на коіой се на све стране само праве лініє помыслити и повући могу, *крива* на противъ, кадъ су лініє по ньой међу разныма точкама криве, или по некимъ криве а по некимъ праве.

Само є една површность равна возможна, а безчисленне криве.

25.

Изяс. Површность или површина произлази, кадъ се една лінія попречно движе, и после себе некій трагъ заоставля. Ако права лінія започето движеніє постоянымъ управленіємъ своимъ задржи, то ће она произвести *површность равну* или *праволінейну*; иначе *криву* или *криволінейну*.
Маѳематіческа површина зовесе дакле у простору одъ лініє написаный путъ.

26.

Изясн. Нагибанћ међусобно две праве лініє фіг. 8. *АБ* и *ВБ*, кое се у едной точки *Б* ударају, састаю и пресѣцаю, зовесе *угалъ*, *кутъ* ф. 8.

(angulus). Нагибаюћесе лініє зовусе *краци*, *рашлѣ* (crura), а састанка, удараня и пресецаня точка зовесе *врь* или *ошилѣ угла* (vertex anguli).

За означеніє угла три су писмена нуждна, одъ кои се свагда оно писмо у среди изговара, гди се угалъ наоди; дакле *АБВ*; или се само съ єднымъ писмомъ угалъ изговара н. п. угалъ *Б*, или угалъ x.

27.

Изясн. Величина угла зависи одъ нагибаня или одъ разширивaня кракова, а дужина кракова ма каква быти може. — Две праве лініє само се у єдной точки ударити и пресећи могу.

28.

Изясн. Кадъ се єданъ угалъ на другій тако положи, да у фіг. 9. угалъ *Е* на угалъ *Б*, и
ф. 9. кракъ *ЕК* на кракъ *БВ* падне, то ће и другій кракъ *ЕД* на другій кракъ угла *Б* пасти, или не. Падне ли *ЕД* на *БА*, то се углови поклапаю, а § 11. число 10.; слѣдователно углови *АБВ* и *ДЕК* равни су. Ако представимо себи, да угалъ *ДЕК* положенъ на *АБВ*, овай угалъ не поклапа, но *ЕК* пада на *БВ*, а *ДЕ* да падне на *ГБ*, то и углови пошто се не поклапаю, не могу равни быти.

29.

Слѣдс. 1. Углови, кои се поклапаю, равни су.

2. Углови, кои су равни, мораю се и поклапати.

30.

Изясн. Кадъ се изъ ошиля угла *Б* фіг. 10. са повольнымъ одтваранѣмъ шестара *Бн* међу крацыма *АБ* и *БВ*, єданъ лукъ *но* напише, то ће число степеній, колико овай лукъ имао буде, быти *мѣра угла*. *ф.* 10.

Тако ће угалъ у толико већій или маньій быти, у колико овай повученый лукъ выше или манѣ степеній числіо буде.

31.

Изяснен. *Доугли* или *упоредни углови* (anguli contigui) зовусе они углови, кои обште ошилѣ и єданъ обштый кракъ имаю, и одъ кои оба друга крака у єдной правой лініи леже, као у фіг. 11. углови *м* и *н*. *ф.* 11.

Доугли или упоредни углови произлазе, кадъ се єдногъ угла н. п. *АДВ* кракъ *АД* продужи преко ошиля у ономъ истомъ управленію н. п. до *Б*.

32.

Изясн. Кадъ єдна права лінія на другу тако удара, да се ни на єдну, ни на другу страну

ненагиба, но доугле међусобно равне причинява, кажесе: ова лінія на ону стои *отвѣсно* (perpendi-
ф. 12. culariter). Тако є у фіг. 12. лінія *АБ* на *ВД* *отвѣсна*.

33.

Слѣд. Лінія отвѣсна са оном, на кою она тако удара, причинява два равна, дакле десна угла. Одтудъ *десанъ* или *правъ* є угалъ *АБВ* съ єдне; а десанъ *АБД* и съ друге стране отвѣсне
ф. 12. *АБ* лініє фіг. 12. угалъ $м = н$.

За означеніе правогъ или десногъ угла употребляваћемо писмо *Д*; дакле $м = Д$, и $н = Д$, значи углови *м* и *н* десни су фіг. 12. И одтудъ десанъ угалъ онай є, кои є своме доуглу раванъ, или кои има за мѣру 90°.

34.

Слѣд. 1. Ако єдна права лінія са другомъ сачинява десанъ угалъ, то є она на ову, а ова на ону отвѣсна.

2. Ако се отвѣсна *АБ* фіг. 13. по нѣномъ управленію и на противну праве лініє *ВГ* страну продужи, и продужена *БД* бы́ће такођеръ отвѣсна. Єръ по § 16. ч. 2. пошто две точке *А* и *Б* опредѣлю станѣ, положеніе и управленіе праве лініє, то ако права *АБ* у отвѣсномъ управленію на *ВГ* буде, она ће и продужена у истомъ упра-

вленію свое положеніе задржати, али по предпоставляню права $AБ$ на $BГ$ отвѣсно пада; дакле и продужена отвѣсна быти мора.

35.

Изясненя. Лінія, коя на другу праву тако удара, да ова са надстояніемъ своимъ неєднаке упоредне углове причинава, кажесе: она стои *коссо* на ову, тако є у фіг. 11. линія $BД$ на $AБ$ *косса*, што є угалъ $м > н$.

Они углови, кои су већи или мањи одъ 90°, т. є. већи или мањи одъ $Д$, зовусе *косси углови* (anguli obliqui), и то они, кои су већи одъ $Д$, зовусе *туби* (тупи obtusi), а мањи одъ $Д$ *оштри* (acuti) *углови*. Тако є у фіг. 14. угалъ $м$ тубъ, ф. 11.
а $н$ оштаръ угалъ, єрь є угалъ $м > Д$, а $н < Д$.

36.

Изясн. *Очелњи угли* (anguli verticales) зовусе они, кои ошиля своя у єдной и оной истой точки по тако противоположена имаю, да свакій кракъ єднога угла са єдынымъ кракомъ другога угла у истомъ управленію лежи, као у фіг. 14. ф. 14.
$м$ и $н$, или $ю$ и $я$.

Постанѣ очелњы' углова быва продуженіемъ кракова угла изъ точке ударања у истомъ правы' лініи управленію.

37.

Наставленіе. *Изъ едне точке неке праве лініе, само се една отвѣсна подићи може*, или
ф. 12. изъ точке *Б* задате праве лініе *ВД* фіг. 12. само се една отвѣсна *АБ* подићи може.

Доказат. Ако бы друга отвѣсна *БГ* іоштъ возможна была, то бы и

угалъ *ГБД* = *Д* и
угалъ *АБД* = *Д*.

Дакле бы по § 11. основ. прав. 4. и уг. *ГБД* = уг. *АБД*, кое е противу § 11. основ. прав. 2.; дакле.

38.

Слѣд. Какогодъ што се изъ едне точке неке праве лініе, само една отвѣсна подићи може, тако исто изъ неке точке ванъ лініе наодећесе, на ту исту праву лінію само се една едина отвѣсна спустити може. Тако на задату праву
ф. 15. *ВД* фіг. 15. изъ точке *А* само се една отвѣсна *АБ* спустити може. Єръ, да ставимо, да бы се осимъ отвѣсне лініе *АБ* іоштъ една *КБ* на лінію *ВД* спустити могла, то бы по предидућемъ доказателству невозможно было; ако бы се друга лінія отвѣсна *АН* осимъ лініе *АБ* наодила, то бы и угалъ *АНД* углу *АНВ* раванъ быти морао, кое е опетъ невозможно. Єръ, да представимо себи, да се угалъ *АНД* безъ промѣне разшири-

ваня кракова помакне, и да угалъ *АНД* раванъ буде углу *КБД*, то кадъ се угалъ *АНД* помакне и постави на угалъ *КБД*, лінія ће *АН* на лінію *КБ*, а угалъ *Н* на угалъ *Б* пасти и совершено се поклопити, и тако ће намъ опетъ невозможность друге лініе отвѣсне по предидућемъ доказателству слѣдовати.

39.

Наставл. *Кадъ е права лінія на другу праву отвѣсна, и кадъ има ма кою точку равноотстоећу одъ две точке друге праве лініе, све ће точке оне отвѣсне лініе, одъ оне две точке друге праве лініе равно отстояти.* Или у фіг. 16. ако е права лінія *АБ* на праву *ВГ* отвѣсна, и ако има єдну точку *Б* равноотстоећу одъ две точке *В* и *Г* праве *ВГ* т. е. тако да е *БГ* = *БВ*, то ће равноотстояти све точке ове отвѣсне лініе *АБ*, дакле и точка *А* и *Е* тако, да ће быти *АВ* = *АГ*, и *ЕВ* = *ЕГ*. ф. 16.

Доказат. Да представимо себи, да се угалъ *АБГ* око *АБ* као око своє осе преокрене докъ на угалъ *АБВ* себи раванъ (§ 33.) падне, обща точка *Б* собомъ самомъ соглашавајућасе, пасти мора *Г* на *В* и онде ће се окончати (збогъ *БВ* = *БГ*), и ону ће исту тамо точку съ њомъ сочинявати, тако ће се поклопити и сложити такођеръ *АВ* и *АГ*, и быће *АВ* = *АГ*, или *ЕВ* = *ЕГ*; дакле.

Да отстои друга ма коя точка *А* или *Е* одъ оне исте две точке *В* и *Г* равно тако, да буде *АВ* = *АГ*, или *ЕВ* = *ЕГ*; отстояће такођеръ равно *Б* одъ *В* и *Г*, т. є. быће *БГ* = *БВ*.

Доказ. Ако є *БВ* = *БГ*, то є и *АВ* = *АГ*, или *ЕВ* = *ЕГ* по предидућемъ доказателству; дакле кадъ две точке опредѣлюю станѣ и положеніє праве лініє § 16. ч. 2., кадъ є *АВ* = *АГ* или *ЕВ* = *ЕГ*, быће такођеръ и *БВ* = *БГ*.

40.

Наставл. *Права лінія стоећа на другой правой тако, да ма коє две нѣне точке равноотстоє одъ две точке друге праве лініє, такова*
ф. 16. *є на ову отвѣсна.* Или у фіг. 16. права лінія *АБ* стоећа на другой правой *ВГ* тако, да има две точке *А* и *Е* равноотстоеће одъ две точке *В* и *Г* друге праве лініє *ВГ*, такова є на ову отвѣсна.

Доказ. Две точке опредѣлюю станѣ и положеніє праве лініє § 16. ч. 2., кадъ дакле *А* и *Е* (или *А* и *Б*) праве *АБ*, одъ две точке *В* и *Г* друге праве лініє равноотстоє, све ће нѣне точке равноотстояти, и тако цѣла ће она лінія *АБ* на другу *ВГ* ударити, да се ни на єдву страну већма ненагиба, али такова є лінія по § 39. отвѣсна; дакле.

41.

Настав. *Лінія отвѣсна найкраћа є права одъ свію изъ исте точке на исту праву повучены.* Или у фіг. 17. лінія отвѣсна *АБ* изъ точке *А* на праву *ВД* повучена, найкраћа є права лінія. *ф.* 17.

Доказ. Да се продужи отвѣсна *АБ* на противну страну до *Е* тако, да буде *БЕ* = *АБ*, после да се союзи точка *В* са *Е* правомъ *ВЕ*, быће и *ВЕ* = *ВА*. Кадъ є права *АЕ* на *ВД* отвѣсна, и обратно є *ВД* на *АЕ* отвѣсна (§ 34.), и кадъ праве *ВД* точка *Б* равноотстоя (по сочиненію) одъ *А* и *Е*, равноотстояће такође *В* одъ *А* и *Е* (§ 39.), т. є. быће *ВЕ* = *ВА*. Кадъ то стоя, то ће свака друга права *АВ* (или *АК*, *АД* и проч.), на исту праву *ВД* изъ точке *А* спуштена, дужа быти одъ отвѣсне *АБ*. Єръ $АВ + ВЕ > АБ + БЕ$ (єръ є она у смотренію ове крива лінія § 15 и 16.), дакле є и $\frac{АВ + ВЕ}{2} > \frac{АБ + БЕ}{2}$ (§ 11 ч. 7.), т. є. (кадъ є *АВ* = *ВЕ* по доказателству, и *АБ* = *БЕ* по сочиненію), дѣленѣ чрезъ 2 свршавајући, быће $АВ > АБ$; дакле є *АБ* найкраћа.

42.

Слѣд. Ако дакле нека лінія буде найкраћа одъ други правы изъ исте точке и на исту праву повучены, она ће быти отвѣсна. Одтудъ за мерень отстоянія едне точке одъ праве лініе, право се употреблюе отвѣсна.

43.

Настав. *Упоредни угли равни су двома деснима, т. е. равнаюсе са два десна угла.* Или
ф. 12. у фіг. 12. ако су углови *ВБГ* и *ГБД* упоредни, то су *ВБГ* и *ГБД* = 2*Д*.

Доказ. 1. Ако су упоредни угли равни, свакій е одъ нъи' равань едномъ, оба дакле двома деснима. 2. Ако су неравни, то се доказати дае, да едань одъ нъи' превозилази десань угаль у толико, колико другоме до десногa оскудѣва, оба дакле равна су двома деснима. Ако представимо себи да е *АБ* на *ВД* у *Б* отвѣсна, то е

1) угаль $ВБА = Д$,
и угаль $АБД = Д$,
дакле $ВБА + АБД = 2Д$ по § 11. ч. 7.

2) угаль $ВБГ = Д + АБГ$
и угаль $ГБД = Д - АБГ$
дакле $ВБГ + ГБД = 2Д$ по § 11. ч. 7.
или
$АБВ + АБГ + ГБД = 2Д$ по § 11. ч. 3.

44.

Слѣд. 1. Сумма дакле свію на едной страни неке праве лежећи' углова, равна е двома деснима, или сви упоредни углови, кои на едной правой лініи бываю, равни су двома деснима или 180°.

2. Сви углови, кои у общой точки своя ошиля имаю, имаю за мѣру 4Д или 360°; ерь се изъ обще точке написати може окружіе.

45.

Наставл. *Угли оѣельни међусобно равни су,* или у фіг. 14. угалъ *м* = углу *н*, као и *ю* = *я*; ф. 14.

Доказ. уг. $м = 2Д - я$ или $м + я = 2Д$ } § 43.
уг. $н = 2Д - я$ или $н + я = 2Д$ }
дакле $м = н$ по § 11. ч. 4. $м + я = н + я$. § 11. ч. 4.
$я = я$
$м = н$. § 11. ч. 7.

Равнымъ начиномъ можесе и за углове *ю* и *я* доказати.

46.

Слѣд. 1. Ако е еданъ одъ упоредны' углова познатъ, изнаћи се може и другій самымъ одузманѣмъ нѣгове мѣре одъ 180°. 2. Ако еданъ одъ упоредны' углова буде десанъ, то ће и другій быти десанъ. Ако еданъ одъ нѣи' буде оштаръ, другій мора быти тубъ: а ако еданъ буде тубъ, мора другій быти оштаръ.

47.

Задатакъ. *Изъ задате неке точке едне*
ф. 18. *праве лініе, подићи отвѣсну.* Или у фіг. 18. изъ задате праве лініе *АБ*, точке *В* подићи линію отвѣсну.

Разрѣшеніе. 1. Стављајући едanъ кракъ шестара у задату точку *В*, другимъ кракомъ повольнымъ отваранѣмъ, да се забележе на задатой правой лініи две точке *Г* и *Е*, обе одъ задате точке *В* равноотстоеће. 2. Поставлюћи еданъ кракъ шестара у *Г*, отвореннымъ шестаромъ выше одъ средине надъ лініомъ задатомъ назначивше лукъ, и тай истый лукъ изъ точке *Е*, пошто смо са оньимъ истымъ отваранѣмъ шестара пресѣкли, добыћемо точку *К*. 3. Пресецаня точку *К* союжаваюћи са задатомъ *В*: быће *КВ* лінія отвѣсна.

Доказат. Лінія права *КВ*, на другу *АБ* тако удара, да нѣне точке *К* и *В* одъ две точке *Г* и *Е* друге праве *АБ* равноотстое (као што е изъ сочиненія познато), али по § 40. такова е лінія отвѣсна; дакле.

48.

Задатакъ. *Изъ задате ванъ лініе праве*
ф. 19. *неке точке, спустити отвѣсну.* Или у фіг. 19. изъ задате точке *В* на лінію *АБ* спустити отвѣсну.

Разрѣшеніє. Изъ задате точке $В$ пристойнымъ полупречникомъ да се напише лукъ $ГДЕ$, дату праву лінію $АБ$ у точкама $Г$ и $Е$ пресецаюћій, после изъ исте две точке $Г$ и $Е$ по полупречникомъ маньимъ (или већимъ, него пре) да се назначе лукови кои ће се у $К$ пресећи, ове две точке $В$ и $Г$ правомъ $ВК$ союжаваюћи и продужуюћи до задате праве точке $Д$, ова ће иста $ВД$ быти пожелана отвѣсна.

Доказат. Кадъ новучемо праве $ВГ = ВЕ$, и $КГ = КЕ$, као равне полупречнике (§ 21.), точке $В$ и $К$ праве $ВД$ равноотстоє одъ $Г$ и $Е$ праве $АБ$, али по § 40. такова є отвѣсна; дакле.

49.

Задат. *Задату праву лінію другомъ правомъ отвѣсно и на двоє пресећи.* Или у фіг. 20. ф. 20.
задату праву $АБ$, другомъ правомъ $ВГ$ отвѣсно и на двоє пресећи тако да буде $АЕ = ЕБ$.

Разрѣшеніє. Изъ крайньи задате праве $АБ$ точака $А$ и $Б$ као изъ средоточія са онымъ истымъ полупречникомъ $АВ = АГ = БВ = БГ$ да се забележе лукови пресецаюћисе у $В$ и $Г$, ове точке пресецаня да се союзе правомъ $ВГ$; ова ће пресећи задату праву $АБ$ у $Е$ не само отвѣсно, него и на две равне части тако, да буде $ЕА = ЕБ$.

Доказат. Праве $ВГ$ две точке $В$ и $Г$ равноотстоє одъ две точке $А$ и $Б$ задате праве

АБ збогъ єдваки' или равны' полупречника, равна отстоянія показивајући' (§ 21.), али по § 40. такова є отвѣсна; дакле права *ВГ* на задату є *АБ* отвѣсна, но права *ВГ* пресеца праву *АБ* у *Е* на две равне части тако, да є $ЕА = ЕБ$ по § 39.; дакле права *ВГ* прописанымъ начиномъ повучена, сѣче дату праву *АБ* у *Е* отвѣсно, и на двоє.

50.

Изясненіє. *Лініє равнотекуће* зовусе оне, коє (§ 18.) ма безконечно продужене, међусобно равно отстоє.

51.

Слѣд. 1. Све лініє отвѣсне, коє се међу двема равнотекућима налазе, равне су. Єръ оваковє лініє отвѣсне изражавају отстоянія точкій єдне лініє равнотекуће одъ друге (§ 42.), али сва су она отстоянія равна (§ 50.); дакле.

52.

Слѣд. 2. Ако дакле напротивъ две лініє отвѣсне, међу двема правима заваћене равне буду, оне ће лініє быти равнотекуће. 2. Лініє равнотекуће нигди се саставити и ударити не могу, ма да се безконечно продуже.

53.

Изясненіє. Ако се две лініє равнотекуће
ф. 21. *АБ* и *ВГ* фіг. 21. одъ неке праве *ДЕ* пресеку,

изродиће се четирь угла *внутрена*, и толико *спольашны*, разногъ наименованія (мы ћемо найупотребителніе овде навести): тако угалъ *н* зове-се *спольашный*, а *х* *внутреный на едной страни* (исто тако *м* и *о*): *ю* и *х* (или *я* и *о*) *два внутрена унакрстна*: *я* и *х* (или *ю* и *о*) *два внутрена на едной страни.*

54.

Наставл. *Кадъ се лініе равнотекуће одъ неке праве пресецаю, онда е* (фіг. 21.) 1) *Угалъ* ф. 21.
спольашный и внутренный на едной страни међусобно, и 2) *два угла внутрена унакрстна међусобно ревна су;* 3) *два внутрена на едной страни равни су двома деснима или имаю за мѣру* 180°. Или у фіг. 21. кадъ се две равнотекуће *АБ* и *ВГ* одъ неке праве *ДЕ* пресецаю, онда е 1) угалъ *н* спольашный = углу *х* внутреноме на едной страни; 2) два угла внутрена унакрстна *ю* и *х* међусобно равни су: 3) два угла внутрена *я* и *х* на едной страни равни су 2Д или 180°.

Доказат. 1. Да представимо, да се лінія права *ВГ* са угломъ *х* узъ пресѣчицу *ЕД* движеніемъ равнотекућимъ у положеніе *АБ* покрене, угалъ *х* поклопиће угалъ *н*, и съ нњиме ће се сложити, као што е очевидно, а количества коя се слажу § 11. ч. 10; дакле $x = н$.

2. $u = ю$ по § 45., али
$u = x$ по предидућемъ доказателству;

дакле $ю = x$ по § 11. ч. 4.

3. Углови $u + я = 2Д$ по § 43;
али u $= x$ по овога § доказат. 1.

дакле $я + x = 2Д$ по § 11. ч. 11.

55.

Слѣдства. 1. Ако се дакле две праве трећомъ тако пресецаю, да є 1) угалъ спольшный и внутреный на єдной страни; или 2) да су два внутрена унакретна међусобно равна; или 3) два внутрена на єдной страни да се равнаю са два десна, такове су лініє равнотекуће.

2. Лініє равнотекуће имаю равно нагибанѣ са лініомъ сѣчицомъ. Нагибанѣ ньіово изражавају углови u и x (или $м$ и $о$ и проч.), али ови су по § 54. међусобно равни, одтудъ

3. Кадъ права нека буде на єдну одъ равнотекућій отвѣсна, она ће и на другу быти отвѣсна (§ 54. ч. 3.), и обратно ако єдна одъ равнотекућій на сѣчицу буде отвѣсна, быће и друга такођеръ отвѣсна.

ф. 5. 4. Међу двема равнотекућима (фіг. 5.) *АБ* и *ВГ* све су отвѣсне *по* и *яо* (и проч.) равнотекуће. Єръ су углови внутрени међу двема равнотекућима равни двома деснима по § 33.

56.

Задатакъ. *На задату праву лінію, чрезъ назначену точку повући равнотекућу.* Или на задату праву лінію *АБ* фіг. 22. чрезъ назначену точку *В* повући равнотекућу *ВК*. ф. 22.

Разрѣш. 1. Изъ задате точке *В* да се спусти отвѣсна *ВД* на задату праву *АБ* (по § 48.), после изъ задате праве лініе *АБ* неке точке *Е* да се подигне отвѣсна *ЕК* (§ 47.), коя ће равна быти прећашньой *ВД*, затымъ да се повуче чрезъ назначену точку *В* и опредѣлену точку *К* права *ВК*; ова е пожелана равнотекућа.

Или 2. Спуштаюћи изъ задате точке *В* отвѣсну *ВД* на задату праву *АБ* (преко *В* къ *x* продужаваюћи ю), да се изъ исте точке *В* подигне отвѣсна *ВК*, ова е пожелана равнотекућа.

Доказат. 1. Лініе праве *ВД* и *КЕ* по предназеденомъ разрѣшенію су на праву *АБ* отвѣсне и међусобно равне, али по § 52. такове су равнотекуће; дакле е права *ВК* на *АБ* равнотекућа.

Доказат. 2. Угли су *КВД* и *ЕДВ* десни (по § 33.), дакле заедно $= 2Д$ или $= 180°$ (§ 33.), али § 55. ч. 3; дакле.

57.

Слѣдство. Чрезъ задату точку на дату праву лінію само се едва лінія равнотекућа повуђи може. Да поставимо, да бы се една друга равнотекућа *Вн* повући могла, быле бы отвѣсне *Ен* и *ДВ* равне по § 51., али *ДВ* = *ЕК* (по сочиненію § 56. Разрѣш.); дакле бы была *Ен* = *ЕК* (по § 11. ч. 4.), кое є невозможно по § 11. ч. 2. и 3.

ГЛАВА ДРУГА.

О СВОЙСТВАМА ПРАВЫ' ЛІНІЯ КЪ ОКРУЖНО ПРИНАДЛЕЖЕЋИМЪ.

58.

Наставл. *Равне тетивке затежу равне лу-*
ф. 24. *кове.* Или у фіг. 24. къ равнымъ тетивкама *АБ* и *БВ*, принадлеже и равни лукови *АБ* и *БВ*.

Доказат. По повученымъ полупречницыма *СА*, *СБ*, *СВ*, да се представи, да се кругоизсѣчникъ *БСВ* око *БС* преокрене и постави на кругоизсѣчникъ *БСА*, тетивке *БВ* и *БА*, као равне, совршено ће се сложити, слѣдователно поклопићесе заедно съ нъима и лукови *АБ* и *БВ* збогъ єднаке кривине (§ 20.), слѣдователно по § 11. ч. 10. быће равне. Одтудъ

59.

Слѣдства. 1. Обратно равни лукови затежу равне тетивке. Али

2. Тетивка већа затеже већій лукъ, маня маньій и обратно.

60.

Примѣчаніе. Изъ Наставленія § 58. слѣдуе начинъ осимъ § 56. како се чрезъ задату точку *К* фіг. 23. равнотекућа на задату праву *БЛ* повући може. Изъ задате точке *К* полупречникомъ повольнымъ *КБ* да се назначи са шестаромъ лукъ неопредѣланъ *БГ*, кои ће дату праву *БЛ* негди у *Б* пресећи; изъ точке *Б*, са задржанымъ пређашньимъ полупречникомъ, да се напише лукъ *КЛ*; тетивка лука *КЛ* да се пренесе изъ точке *Б* на лукъ *БГ*, и точка *Г* да се союзи са задатомъ *К* правомъ лініомъ *ГК*; ова ће быти пожелана равнотекућа на праву *БЛ*. Єръ по повученой правой *БК*, изродићесе углови *м* и *о* равни, збогъ *БГ* и *КЛ* равны' лукова, одъ равны' тетивака (по сочиненію) затегнуты' равны' § 30. 58., али § 55. ч. 2.; дакле. ф. 23.

61.

Изясненіе. При окружію петорогубы' лінія можемо разликовати, то есть: *зрачце* или *полупречнике*, *пречнике*, *тетивке*, *дирке* и *сѣчице*. *Зрачацъ*, *полупречникъ*, зовесе свака права лінія одъ средоточія окружія къ повольной точки нѣкой повучена; *Пречникъ* (діяметеръ) прекомѣрникъ, зовесе свака права лінія, кое крайнѣ точке у окружію леже, и коя крозъ средоточіє прелази; *тетивка* є напротивъ свака права лінія, кое крайнѣ точке у окружной линіи леже, но ова крозъ средоточіє непрелази; *дирка*, додирајућа лінія, зовесе свака права лінія, коя ванъ окружія лежи тако, да ова са окружномъ лініомъ само *єдну* точку обшту има, у коіой ова окружіє исто додира; *сѣчица*, сѣчећа лінія, зовесе свака права лінія, коя окружіє у две точке сѣче.

62.

Слѣдства. 1) Полупречници, пречници и тетивке налазесе у окружію, дирке ванъ окружія, а сѣчице одъ части у окружію, а одъ части ванъ окружія. 2) Полупречници, пречници и тетивке су ограничене, дирке и сѣчице по себи неограничене лініе. 3) Ако се продужи полупречникъ одъ средоточія до окружія, добыће се пречникъ; ако се продужи тетивка или пречникъ на єдну или на обе стране повольно, добыћесе сѣчица. 4) Свако окружіє има безчислене полупречнике, кои су сви међусобомъ равни. 5) Свако окружіє има безчислене и међусобно равне пречнике.

63.

Наставл. *Равне тетивке равноотстое одъ* ф. 42. *средоточія.* Или у фіг. 24. равне тетивке *АБ* и *БВ* равноотстое одъ средоточія окружія *С*.

Доказат. Равны' тетивака *АБ* и *БВ* отстоянiє одъ средоточiя изражавају отвѣсне лiнiє *нС* и *оС* по § 42. али ове су отвѣсне међусобно равне; єръ ако се кругоизсѣчникъ *БСВ* око *БС* као око осе преокрене, и положи на кругоизсѣчникъ *БСА*, збогъ $АС = СВ$ (по § 62. ч. 4.), и збогъ $БВ = БА$ (по предпоставлянію), точка *Б* собомъ ће се сама поклопити, а *В* пасть'ће на *А* тако, да ће се обе тетивке поклопити, и тако єдну праву лiнiю сочинявати, а кадъ то буде, то и отвѣсна *Со* на отвѣсну *Сн* пасти мора, и єдну сочиняваюћи тако, да ће $Со = Сн$ быти; єръ бы се иначе изъ средоточiя на исту тетивку две отвѣсне спустити могле, кое є (по § 38.) невозможно; дакле

64.

Слѣдства. 1. Маня тетивка већма, а већа тетивка манѣ отстоји одъ средоточiя. Єръ отстоянiє веће тетивке *ДЕ* одъ средоточiя *С* изражава *Сх*, а отстоянiє манѣ тетивке *КГ* (на предидућу равнотекућа) изражава *Ся* (§ 42.), али є $Ся > Сх$ (§ 11. ч. 2.); дакле.

2. Пречникъ є дакле одъ свiю тетивака найвећiй. Єръ онъ одъ средоточiя ни мало неодстои.

65.

Наставл. *Лiнiя права проложена кроз средоточiя на тетивку отвѣсна, пресѣца*

1) *исту ону тетивку*, 2) *лукъ одъ исте тетивке затегнутый, као и* 3) *угалъ на две равне части*.

ф. 25. Или у фіг. 25. линія права CB пролазећа преко средоточія C, на тетивку $AБ$ отвѣсна, двопресѣца како 1) исту тетивку, да быва $Ax = xБ$, тако 2) лукъ $ABБ$ одъ исте тетивке затегнутый, да быва $AB = BБ$, тако и 3) угалъ $ACБ$ на две равне части, да угалъ ACB = быва углу $BCБ$.

Доказателство. Овакове линіє отвѣсне CB точка C збогъ $CA = CБ$ (§ 62. ч. 4.) равно отстои одъ крайньи тетивке $AБ$ точака A и $Б$, дакле и све нѣне точке, слѣдователно и x и B одъ исты A и $Б$ равно отстоє (§ 39.); дакле є 1) $xA = xБ$. 2) збогъ равны точке B отстоянія BA и $BБ$, коє су заедно и тетивке, лукъ є BA = луку $BБ$ (§ 58.), и зато є 3) угалъ $ACB = BCБ$ (§ 30.).

66.

Слѣд. Ако напротивъ линія права CB или Cx тетивку $AБ$ отвѣсно двопресѣца на $xA = xБ$, она 1) сѣче и лукъ $ABБ$ одъ исте тетивке придржаный (слѣдователно и угалъ $ACБ$), на две равне части, да є лукъ $BA = BБ$ збогъ равны тетивака BA и $BБ$ (§ 58.), као равны исте линіє CB точака B одъ A и $Б$ отстоянія BA и $BБ$ (§ 39.): 2) пролази преко средоточія. Єръ ако она не бы пролазила преко средоточія, могла бы се двопресецанѣмъ линіє $AБ$ у точки x, преко средоточія $н$ (да буде средоточіє у $н$) друга лінія отвѣсна $хн$ новуħи, коє є по § 37. невозможно, коє кадъ є невозможно, невозможно є и то, да лінія $Сх$ или $СВ$ тетивку $АБ$ отвѣсно пресецаюħа, не преħе преко средоточія.

67.

Настав. *Тетивке равнотекуħе заваħаю равне лукове.* Или у фіг. 26. тетивке равнотекуħе $АБ$ и $ВД$ заваħаю равне лукове $АВ$ и $БД$. ф 26.

Доказат. По повученой преко средоточія $С$ равнотекуħе тетивке $АБ$ и $ВД$ отвѣсной лініи $ЕК$ (§ 48.), ова ħе двопресѣħи лукове $АКБ$ и $ВКД$, одъ равнотекуħи' тетивака заваħене, или быħе

$$АВ + ВК = БД + ДК, \text{ и}$$
$$ВК = ДК \quad \text{по § 65.};$$

дакле $АВ = БД$ (одузиманѣмъ другога уравненія одъ првога.) Али $АВ = БД$, то су лукови одъ равнотекуħи' тетивака заваħени; дакле.

68.

Слѣд. И напротивъ, ако тетивке заваħаю равне лукове, оне су равнотекуħе.

69.

Настав. *Полупрѣчникъ на точку додиранія дирке повученъ, стои на дирку отвѣсно.* Или ф. 27. у фіг. 27. полупречникъ *СБ* на точку додираня *Б* повученъ, стои на дирку *ВД* отвѣсно.

Доказ. Пошто се само точка ударання *Б* дирке *ВД* у окружной лініи налази, а све нѣне друге точке ванъ окружія положене су (§ 61.), точке ударања одъ средоточія отстояніе, слѣдователно полупречникъ *СБ* (§ 16.) найкраћа є свію правы' лінія, одъ средоточія С на дирку *ВД* (као преко окружія) повучены', али по § 42. такова є отвѣсна; дакле.

70.

Слѣд. 1. Ако дакле полупречникъ (окрайкомъ своимъ) каквой правой лініи отвѣсно надстояо буде, онъ ће быти дирка.

ф. 26. 2. Дирка *ГХ* фіг. 26. са тетивкомъ *ВД* равнотекућа (као две тетивке равнотекуће § 67.) заваћа равне лукове. Єръ полупречникъ *СК* не само є на дирку *ГХ* (§ 69.), него и на тетивку *ВД* отвѣсанъ по § 55. чис. 3.; дакле зрачацъ овде *СК* двопресѣца лукъ *ВКД*, слѣдователно є *ВК* = *КД* по § 65.

71.

Задатакъ. *Определити точку ударања дир-*
ф. 27. *ке.* Или у фіг. 27. Определити точку ударања *Б* дирке *ВД*.

Разрѣш. Да се спусти изъ средоточія *С* на дирку *ВД* отвѣсна *СБ* по § 48.

Доказ. Дирке точка $Б$, у коіой се она отвѣсна као зрачацъ окончава, точка є удараня по § 69.; дакле.

72.

Задатакъ. *Преко задате три точке неупоредно стоеће, повући окружіе круга.* Или у фіг. 28. преко задате три точке $А, Б, В$ не упоредно стоеће, повући окружіе круга $АБВА$. ф. 28.

Разрѣш. Да се союзи една одъ задаты точака, $Б$ са осталимъ двема $А$ и $В$ правымъ линіяма $БА$ и $БВ$; праве ове зато, што оне три точке не леже у єдномъ управленію (по предпоставляню), међусобно нагибаћесе, к быће тетивке повући се имаюћегъ окружія (§ 20.). Тетивке ове $АБ$ и $БВ$ двопресѣцаюћи отвѣсно правима $ДС$ и $ЕС$ по § 49.; точка $С$, у коіой се двопресецаюће ударају, средоточіе є повућисе имаюћегъ окружія, у кои убадаюћи єданъ кракъ шестара, а другій отвараюћи ма до коє точке одъ задаты' $А, Б, В$, и назначуюћи окружіе, то ће оно преко ове три точке прећи.

Доказ. Како $ДС$ тако и $ЕС$ пролази преко средоточія (§ 66.), дакле, кадъ се две праве линіе само у єдной точки ударити и пресѣћи могу по § 27., а окружіе само єдно средоточіе има, (§ 20.), то ясно слѣдуе, да точка $С$, у коіой се ове отвѣсне пресецаю, мора быти средоточіе окружія.

73.

Слѣдства. 1. Ако дакле нека точка у кругу одъ три окружія точке равно отстояла буде, она ће быти средоточіе.

13. 2. Преко три точке *В, Б, Г* фіг. 13., у правой лініи налазећесе, окружіе круга повућисе неможе.

3. Дакле линія права не може се у три точке окружія наодити.

74.

Задатакъ. *Непознато окружія или лука*
ф. 28. *средоточіе изнаћи.* Или у фіг. 28. Окружія *АБВА*, или лука *АБВ*, средоточіе *С* изнаћи.

Разрѣш. Да се повуку тетивке *АБ* и *БВ*, кое правима *ДС* и *ЕС* отвѣсно да се двопресѣку по § 49.; обща ударања пресецајућисе лінія точка *С*, средоточіе е пожелано.

Доказат. Доказателство є § 72.

75.

Задатакъ. *Двопресѣки окружія лукъ.* Или
ф. 29. у фіг. 29. лукъ *АГБ* пресѣћи на двое тако, да буде *АГ* = *ГБ*.

Разрѣш. Задатый лукъ *АГБ* да се союзи тетивкомъ *АБ*, кою по § 49. отвѣсно и на двое пресецајући правомъ *ВГ*, истомъ ће се правомъ двопресѣћи у $Г$ и лукъ тако, да ће быти $АГ = ГБ$.

76.

Задатакъ. *Уголъ двопресѣћи.* Или у фіг. 30. уголъ $АСГ$ двопресѣћи тако, да буде $АСВ = ВСБ$. ф. 30.

Разрѣш. Изъ вр'а или ошиля угла $С$ међу крацыма нѣговима полупречникомъ повольнымъ $АС$ да се напише лукъ $АВБ$, и овай лукъ надлежномъ тетивкомъ $АБ$ да се затегне; после ова тетивка по § 49. правомъ $ЕС$ да се отвѣсно двопресѣче; ова ће двопресѣћи и задатый уголъ $АСБ$ тако, да е $АСВ = ВСБ$.

Доказат. Права $ЕС$ двопресѣца лукъ $АВБ$ на равне лукове $АВ$ и $ВБ$ по § 65., али су лукови $АВ$ и $ВБ$ мѣре углова противостоећи по § 30. и ове су равне; дакле и углови ньіови равни быти морају; слѣдователно уголъ $АСВ$ = углу $ВСБ$.

ГЛАВА ТРЕЋА.

О МѢРАМА УГЛОВА, КОЕ ПРАВЕ ЛІНІЕ КЪ ОКРУЖІЮ ПРИНАДЛЕЖЕЋЕ ПРИЧИНЯВАЮ.

77.

Изясненіе. Углови при окружію или су у окружію т. е. *внутрени*, или вапъ окружія т. е. *споляшньи*; оніи могу быти *средоточни* (у средоточію), или *окружни углови* (у окружной лініи). *Средоточный угалъ* зовесе онай угалъ у окружію, кои ошилъ свое у средоточію има, а нѣгови крацы полупречницы; *Окружный угалъ* зовесе онай угалъ, кои ошилъ негди у окружной лініи има, а нѣгови су краци праве лініе у кругу; *споляшный* угалъ кодъ круга таковый е угалъ, кои ошилъ вапъ круга има, а нѣгови су краци дирке или сѣчице.

78.

Наставл. *Угалъ, кои быва у точки додираня одъ дирке и тетивке, има за мѣру полу лука, одъ исте тетивке затегнутогъ.* Или угалъ ф. 31. *АБВ* у фіг. 31., кои быва одъ дирке *АБ* и тетивке *БВ* у точки додираня, има за мѣру полу лука *БЕВ* одъ исте тетивке затегнутогъ.

Доказат. Да бы ово доказати могли, треба повући 1) Пречникъ *ГХ* на тетивку *БВ* равнотекућій: 2) Пречникъ *ЕК* на исту тетивку *БВ*, а сотымъ и на равнотекућу *ГХ* отвѣсный (§ 55. ч. 3.): 3) полупречникъ *СБ* на точку додирања; быће углови *АБС* и *ЕСГ* десни (по § 33., 69.), слѣдователно равни, или *АБС* = *ЕСГ*, дакле и мањи углови у овима деснима угловима наодећисе равни су, или

$$АБВ + ВБС = ЕСБ + БСГ,$$

али угалъ $ВБС = БСГ$ по § 54. ч. 2.

дакле угалъ *АБВ* = *ЕСБ* по § 11. ч. 7. отніемъ, али угалъ *ЕСБ* има за мѣру лукъ *БЕ* по § 30., дакле и угалъ окружный *АБВ* има истый лукъ *БЕ* за мѣру, али *БЕ* = *ЕВ*, т. є. *БЕ* є половина лука *БЕВ*, одъ тетивке *БВ* затегнутогъ по § 65.; дакле.

79.

Слѣд. Као годъ угалъ *АБВ* што има за мѣру полу лука *БЕВ*, тако и одъ противне стране ове тетивке *БВ* угалъ окружный *ВБД*, кои такођеръ быва одъ тетивке *БВ* и дирке *БД*, има за мѣру полу лука *ВХКГБ*.

80.

Наставл. *Угалъ окружный, кои быва одъ две тетивке, има за мѣру полу лука, коме онъ крацыма своима надстои.* Или у фіг. 32. угалъ фі. 32.

окружный *АБВ* (*ю*), кои быва одъ две тетивке *АБ* и *БВ*, има за мѣру полу лука *АВ*, коме онъ крацима своима надстои.

Доказат. Доказателства овога ради да се повуче у помоћь дирка *ДЕ* по ошилю поменутога угла; отудъ изродившисе углови $x + ю + я$ имаю за мѣру полуокружіє или $\frac{1}{2}$ *БА* $+ \frac{1}{2}$ *АВ* $+ \frac{1}{2}$ *ВБ* по § 44. ч. 1., али *x* има за мѣру $\frac{1}{2}$ *БА*, а равнымъ начиномъ и *я* има $\frac{1}{2}$ *БВ* по § 78.; дакле за *ю* остає $\frac{1}{2}$ *АВ*, коє се доказати имало.

81.

Слѣдства. 1. Угалъ средоточный *АСВ* двоянъ є угла *ю* (т. є. двапутъ толико великій) истоме луку надстоєћегъ. Єръ угалъ средоточный *АСВ* има за мѣру цѣо лукъ *АВ* по § 30., а угалъ окружный *ю* има $\frac{1}{2}$ лука *АВ* по § 80.

ф. 33. 2. Угалъ окружный *АВБ* у фіг. 33., кои крацима своима *АВ* и *ВБ* пречнику *АБ* надстои, десанъ є. Єръ онъ има полуокружіє за мѣру одъ истогъ полупречника затегнуто, или 90° по § 80. и 21.

3. Сви углови окружни *о*, *ю*, *x* ошиля у окружію имаюћи, истоме луку надстоєћи међусобно равни су, збогъ єдне полу лука, одъ кракова ньіовы' завађене, мѣре $\frac{1}{2}$ *ДАВБЕ*.

82.

Задатакъ. *Изъ крайнѣ точке задате праве лініе подићи отвѣсну*. Или у фіг. 34. изъ задате лініе *АБ*, крайнѣ точке *А* подићи отвѣсну *АВ*. ф. 34.

Разрѣш. Забадаюћи еданъ кракъ шестара у повольну точку *С* надъ датомъ правомъ лініомъ, а другій отвараюћи до задате крайнѣ точке *А*, и овымъ отваранѣмъ шестара *АС* да се напише лукъ *ВАД*, кои ће дату праву негди у *Д* пресѣћи. Ову точку пресецаня *Д* союжаваюћи са средоточіемъ *С* и продужуюћи докъ она написаный лукъ непресѣче у *В*, после исту пресецаня точку *В* са *А* правомъ *АВ* союжаваюћи; ова е *АВ* пожелана отвѣсна.

Доказат. Угалъ е *ВАД* десанъ, еръ онъ по § 81. ч. 2. пречнику надстои, али по § 34. ч. 1. ако една права лінія са другомъ сачинява десанъ угалъ, то е она на ову, а ова на ону отвѣсна; дакле.

83.

Задатакъ. *На задату точку окружну повући дирку* или фіг. 35. да буде окружія *ВАНВ* задата точка *А*, на кою да се повуче дирка *АБ*. ф. 35.

Разрѣш. Задата точка *А* да се союзи са средоточіемъ окружія *С* правомъ *АС*, кои ће быти зрачацъ истогъ окружія, затимъ изъ задате точке *А* да се подигне отвѣсна *АБ* по § 82.; ова ће быти пожелана дирка.

Доказат. Доказателство є исто § 82.

84.

Слѣд. Преко задате у окружію точке *А* само се єдна дирка повући може. Єръ се само єдна изъ крайнѣ точке *А* праве лініє *АС* подићи може по § 37.

85.

Задат. *Изъ задате ванъ окружія точке,*
ф. 35. *на окружіє повући дирку*. Или фіг. 35. на окружіє *АНВА* изъ задате точке *Б* повући дирку *БА*.

Разрѣш. Задата точка *Б* да се союзи са средоточіємъ окружія *С* правомъ *БС*, и изъ нѣне среднѣ точке *Д* полупречникомъ *ДБ* да се напише окружіє *БАСБ*, точка *А*, у коіой ново окружіє дато окружіє пресеца, да се союзи са задатомъ точкомъ *Б* правомъ *АБ*, ова ће быти пожелана дирка.

Доказат. Кадъ се повуче зрачацъ *АС*, *АБ* є збогъ десногъ угла *БАС* по § 81. ч. 2. отвѣсва лінія по § 34. ч. 1., слѣдователно и дирка по § 70. ч. 1.

86.

Слѣд. Изъ задате ванъ окружія точке *Б* могу се две дирке повуђи, една изъ задате точке *Б* на *А*, а друга на *Н*. Єръ у двема овима точкама новоназначено окружіє *НБАСН* дато окружіє *АНВА* сѣче.

87.

Наставл. *Угалъ окружный, кои быва одъ тетивке и сѣчице, има за мѣру полусумму лукова одъ тетивке и сѣчице придржаваны.* Или фіг. 36. угалъ окружный *АБВ*, кои быва одъ тетивке *ВБ* и сѣчице *АД*, има за мѣру полусумму лукова *БВ* и *БД* одъ тетивке и сѣчице придржаваны, или $\frac{1}{2}$ *БВ* + $\frac{1}{2}$ *БД*. ф. 36.

Доказат. Углови *АБВ* + *ВБД* као упоредни по § 43. имаю за мѣру 2Д или полуокружіє т. е. $\frac{1}{2}$ *ВД* + $\frac{1}{2}$ *ВБ* + $\frac{1}{2}$ *БД*, али угалъ окружный *ВБД* по § 80. има за мѣру $\frac{1}{2}$ *ВД*, дакле за угалъ *АБВ* остає $\frac{1}{2}$ *БВ* + $\frac{1}{2}$ *БД*, а то є оно, што се имало доказати.

88.

Наставл. *Угалъ внутреный, кое се ошилѣ у кругу но ванъ средоточія нѣгова налази, има за мѣру полусумму лукова одъ исты страна и одъ продужены кое оне у окружію заваћаю.* Или фіг. 37. Угалъ внутреный *а*, ко- ф. 37.

єгъ се ошилѣ у кругу, но ванъ средоточія налази, има за мѣру $\frac{1}{2}$ *БД* + $\frac{1}{2}$ *ЕК*.

Доказат. По продуженымъ странама угла *Ба* и *Да* до окружія, быѣе оне *ДЕ* и *БК* тетивке, да се повуче тетивка *ЕГ* равнотекућа на *КБ*, быѣе угалъ *ю* = углу *а* по § 54., али угалъ *ю* има за мѣру $\frac{1}{2}$ *ГБ* + $\frac{1}{2}$ *БД* по § 80., дакле и угалъ *а* као нѣму равань има ту исту мѣру; али є лукъ *ГБ* = *ЕК* по § 67.; дакле равна на мѣсто равны' поставляюѣи, угалъ *а* има за мѣру $\frac{1}{2}$ *БД* + $\frac{1}{2}$ *ЕК*.

89.

Наставл. *Угалъ споляшный, кои быва одъ две сѣчице, има за мѣру полуразлике лукова,*
ф. 38. *кое обе оне у окружію заваћаю.* Или фіг. 38. Угалъ споляшный *БАВ*, кои быва одъ две сѣчице, има за мѣру $\frac{1}{2}$ *ВГ* — $\frac{1}{2}$ *ДЕ*.

Доказат. Изъ *Е* да се повуче тетивка *ЕГ* равнотекућа на сѣчицу *АБ*; быѣе угалъ окружный *ГЕВ* = углу *БАВ* споляшнѣмъ по § 55., али угалъ окружный *ГЕВ* по § 80. има за мѣру полу лука *ГВ*; дакле и угалъ споляшный *БАВ* као нѣму равань, мора имати ту исту мѣру, али *ГВ* = *БВ* — *БГ* (као што є очевидно), а *БГ* = *ДЕ* по § 67. дакле равна на мѣсто равны' поставляюћи, т. є. на мѣсто *БГ*, *ДЕ*, угалъ споляшный *БАВ* има за мѣру $\frac{1}{2}$ *БВ* — $\frac{1}{2}$ *ДЕ*.

90.

Наставл. *Угалъ споляшный* 1) *кои быва одъ сѣчице и дирке:* 2) *кои быва одъ две дирке, има за мѣру полуразлике лукова, на коима краци почивао.* Или фіг. 39. 1) угалъ споляшный $ВАБ$, кои быва одъ дирке $ВА$ и сѣчице $АБ$; 2) угалъ $ГАВ$, кои быва одъ две дирке $ГА$ и $АВ$, има за мѣру полуразлике лукова, на коима краци почивао. *ф.* 39.

Доказат. 1. Угалъ споляшный $БАВ$: овай има за мѣру $\frac{1}{2}$ $БВ$ — $\frac{1}{2}$ $ДВ$. Єръ, кадъ се дирка $АВ$ продужи до $Е$, и изъ точке удараня кадъ се повуче тетивка $ВК \# АБ$, бы̂ће угалъ споляшный $БАВ$ = углу $КВЕ$ окружноме по §. 54. слѣдователно имаће єдну мѣру $\frac{1}{2}$ $ВК$, кою има угалъ окружный $КВЕ$ по § 78, али лукъ $ВК = ВБ — КБ$, као што є очевидно, а $КБ = ДВ$ по § 67.; дакле угалъ споляшный има за мѣру $\frac{1}{2}$ $БВ$ — $\frac{1}{2}$ $ДВ$ (постављаюћи равна на мѣсто равны).

2. Угалъ споляшный $ГАВ$ има за мѣру $\frac{1}{2}$ $ГБВ$ — $\frac{1}{2}$ $ГДВ$. Єръ каогодъ што угалъ $БАВ$ има за мѣру $\frac{1}{2}$ $БВ$ — $\frac{1}{2}$ $ДВ$ (по доказателству), тако и угалъ $ГАБ$, кои такођеръ быва одъ дирке $ГА$ и сѣчице $АБ$, има $\frac{1}{2}$ $ГБ$ — $\frac{1}{2}$ $ГД$, дакле оба угла заедно $БАВ + БАГ$, слѣдователно цео угалъ $ГАВ$ има за мѣру $\frac{1}{2}$ $БВ$ — $\frac{1}{2}$ $ДВ$ + $\frac{1}{2}$ $ГБ$ — $\frac{1}{2}$ $ГД$, или скраћиваюћи $\frac{1}{2}$ $БВ$ + $\frac{1}{2}$ $ГБ$ — $\frac{1}{2}$ $ДВ$ — $\frac{1}{2}$ $ГД$ = $\frac{1}{2}$ $ГБВ$ — $\frac{1}{2}$ $ГДВ$.

91.

Слѣдство. Што годь далѣ ошлѣ угла одъ
ф. 40. лука или тетивке $АБ$ фіг. 40. на коіой онай кра-
цыма своима почива, отстои, сотымъ є све ма-
ньій угалъ (да тако у безконечно малій отићи мо-
же). Да буде средоточіє окружія у $С$, быће $\frac{1}{2}$
лука $АБ + \frac{1}{2} КДЕГ$ мѣра угла $ю$ по § 88: лукъ
$АБ$ є мѣра угла $С$ по § 30: лукъ $\frac{1}{2} АБ + \frac{1}{2} ДЕ$
угла $о$ по § 88: лукъ $\frac{1}{2} АБ$ мѣра угла $я$ по §
80: $\frac{1}{2} АБ - \frac{1}{2} ДЕ$ мѣра угла x по § 89. али $\frac{1}{2}$
$АБ - \frac{1}{2} ДЕ < \frac{1}{2} АБ < \frac{1}{2} АБ + \frac{1}{2} ДЕ < АБ < \frac{1}{2}$
$АБ + \frac{1}{2} КДЕГ$, као што є очевидно.

ГЛАВА ЧЕТВРТА.

О СВОЙСТВАМА ОКРУЖІЯ КРУГОВА МЕЂУСОБНЫМА.

92.

Изясненіє. *Окружія* кругова *сасредоточна* или *равнотекућа* зовусе она, коя обште средото-
ф. 41. чіє $С$ фіг. 41. но разне полупречнике имаю. $Сю$. $Ся$.

93.

Настава. *Ако се окружія кругова у три обште точке слажу, сложи ћесе у свима, и быће равна.*

Доказат. Ако се по обштимъ точкама повуку тетивке, и ове се отвѣсно двопресѣку по § 49., окружія кругова имаће исто средоточіє и истый полупречникъ (§ 72. 73.), и тако быће равна.

94.

Слѣдства. 1. Окружія два круга дакле у три точке се пресећи не могу, єръ бы се точно поклопила.

2. Ако се два окружія *АяонА* (фіг. 41.) и *БонБ* сѣку, само ће се у две точке као *о* и *н* пресѣћи. ф. 41.

3. Окружія два круга само се у єдной точки додирнути могу. Єръ у две точке се пресѣцаю, а у три слажу.

95.

Настава. *Средоточія и точка додираня окружія два круга на истой површини додираюћисе леже у єдной правой лініи.*

Доказат. Да се додирну окружія два круга изнутра у x фіг. 42, нъіови полупречницы Cx ф. 42. и cx на обшту точку повучени, настояће дирки отвѣсно по § 69; дакле кадъ се изъ исте точке неке праве лініє само єдна отвѣсна подићи може по § 37., полупречницы, дакле и средоточія и точке додираня у истой правой лініи Ccx лежати мораю.

Ако се додираю два окружія споля у x, лінія CxH, преко точке додираня x прелазећа, као изъ полупречника Cx и Hx, на обшту додираня точку x повучены' состоећисе, одъ свію є други лінія изъ C на H ванъ точке додираня повучены' найкраћа, еръ свака друга лінія као $CoюH$ осимъ два полупречника Co и $Hю$ (прећашньима равна по § 62. ч. 4.) содржава іошть празнину $oю$ међу окружіяма споля наодећусе, али є найкраћа свію лінія одъ точке до точке повучены, права по § 16.; дакле CxH лінія є права; дакле.

96.

Задатакъ. *Точку додираня окружія два круга на истой поврѣшини додираюћійсе определити.*

ф. 42. Доказат. Средоточія CH или Cc фіг. 42. додираюћійсе окружія союжаваюћи, точка она у окружію, преко кое права лінія прелази, точка є додираня. по § 95

ГЛАВА ПЕТА.

О ПОНЯТІЮ ПОЛИГОНА ВООБШТЕ, И О СВОЙСТВАМА ТРИУГЛОВА ПООСОБЪ.

97.

Изясненіе. *Полигонъ* (πολυγωνον) *многоуголникъ*, или фігура *многострана*, вообште зовесе просторъ одъ правы' лінія заключеный. Исте оне праве лініе, кое међусобнымъ ударанѣмъ своимъ углове сачинявамо, и запремину заключавамо, зовусе стране полигона: а све заедно узете, у колико просторъ заключеный оне опредѣлюю, *периметаръ* (περιμετρος) *омѣріе*. Полигонъ по числу страна, и углова зовесе триуголный *тригонъ*, четвероуголный *тетрагонъ*, петоуголный *пентагонъ*, шестоуголный *ексагонъ* и проч. као што се изъ три, четирь, петь, шесть, и. т. д. страна, или углова состои.

98.

Изясненіе. Полигонъ *правиланъ* зовесе, кои све стране међусобно, као и све углове међусобно равне има, иначе *неправиланъ*.

99.

Изясн. Полигона *едновидна* (ejusdem speciei) она су, коя се изъ равногъ числа страна состое: иначе су *разновидна*.

100.

Изясн. *Полигона подобна* зовусе она едновидна полигона, коя углове соотвѣтствение међусобно (првый првомъ, другій другомъ, и т. д.) равне имаю.

101.

Слѣд. Сва полигона правилна едновидна подобна су. Єрь су у овима сви углови међусобно равни, и соотвѣтственно равни.

102.

Изясн. Найпростіи полигонъ є просторъ са трима лініяма заключенъ (овде є речь о праволінейномъ), кои се поособъ *тригонъ* или *тругоолъ* (τρίγονον) зове. Кадъ представимо себи,
ф. 43. да тругалъ *АБВ* фіг. 43. едной одъ страна свои надстои, т. є. на нъой почива, она страна *БВ* зовесе *основица* (basis): остале две стране *АБ* и *АВ* *краци*, вр' угла *А*, основици противустоеѣій, *тругла ошилъ*: лінія отвѣсна *АД*, изъ ошиля тругла на основицу спуштена, *высина* тругла (§ 42).

103.

Изясн. *Тругалъ* у смотренію страна зовесе *равностранъ*, (aequilaterum) кои се изъ страна међусобно равны состои; *равнокракъ* (aequicrurum), кои има две стране равне; а тругалъ, кои све три стране неравне има, зовесе *неравностранъ* (scalenum). Тругалъ у смотренію углова, зовесе тругалъ *десноуголанъ* (rectangulum), кои има еданъ угалъ десанъ; угалъ десанъ сочиняваюће стране зовусе *катети*, а десномъ углу противостоећа страна, зовесе *ипотенуза*; *тубоуголанъ* (obtusangulum), кои еданъ угалъ тубый; и тругалъ *оштроуголанъ* (acutangulum), кои углове оштре заключуе. Последня два тругла іоштъ се именую *косоуголна.**)

104.

Изяснен. Тругли (као вообште полигона), кои се само у смотренію ньіове равне површине међусобно сматраю, чисто *равни* зовусе.

104.

Изяснен. Подобіе тругловa увиђавно е изъ § 100. вообште, пообобъ пакъ *тругли по-*

---

*) Изясненія ради у фіг. 43. △ равнокракъ, видитсе може.
„ 44. △ равностранъ,
„ 47. △ неравностранъ,
„ 45. △ десноуголанъ,
„ 46. △ тубоуголанъ,
„ 43. △ косоуголанъ.

добни зовусе онiи, кои имаю сва три угла соотвѣтственно равна: то есть првый првоме, другiй другоме, а трећiй угалъ трећемъ равна. *Супротне стране* међусобно у триуглима подобнима, као вообште у полигонима подобнима, оне су, кое угловима соотвѣтственно равнима противостое.

106.

Изяснен. Триугли *подобни* и *равни* зовусе онiи, кои и углове и стране соотвѣтственно равне имаю. А тако исто и сва полигона вообште. У таковомъ случаю кажесе, да се триугли или вообште полигона слажу.

107.

Наставл. I. *Два триугла слажусе, кадъ су две стране са обувићенимъ угломъ међусобно равне.* Или у фiг. 48. кадъ е

ф. 48. $$\left\{\begin{aligned} АБ &= аб \\ БВ &= бв \\ Б &= б \end{aligned}\right\}, \text{ то е и } \triangle\, АБВ \cong \triangle\, абв.$$

Доказат. Да представимо себи, да се $\triangle$ *АБВ* тако на $\triangle$ *абв* положи, да *Б* на *б*, *БВ* на *бв* падне, то мора.

1. *В* на *в* пасти, зборъ $БВ = бв$, дакле $БВ \cong бв$ по § 11. ч. 10.

2. *БА* на *ба*, зборъ $АБВ = абв$.

3. *А* на *а*, зборъ $БА = ба$; дакле $БА \cong ба$.

4. Будући да *В* на *в*, а *А* на *а* пада, то є *АВ* ≅ *ав*; дакле △ *АБВ* ≅ △ *абв*.

108.

Слѣд. Два тругла деспоуголна слажусе, кадъ су оба катета међусобно равна.

109.

Наставл. *У равнокракомъ тругулу, угли су на основицы наодећисе међусобно равни.* Или у фіг. 43. кадъ є *АБ* = *АВ*, то є и *АБВ* = *БВА*. ф. 43.

Доказат. Кадъ се изъ среднѣ точке *Д* неравне стране *БВ* на противоположеный угалъ *А* подигне отвѣсна *ДА*, она ће поделити цео тругалъ на два маня међусобно равна, т. є. на △ *ВДА* и △ *БДА*. Єръ кадъ се △ *ВДА* око стране *ДА* преокренути представи, и на △ *БДА* положи, то ће се они збогъ *БД* = *ДВ*, *АБ* = *АВ* совршено сложити и поклопити по § 107., дакле быће △ *АДВ* ≅ *АДБ*, слѣдователно и соотвѣтственни углови међусобно равни, дакле и угалъ *Б* = уг. *В*.

110.

Слѣд. Тругалъ, кои два међусобно равна угла има, равнокракъ є, у таковомъ тругулу равнимъ угловима супротне су стране равне, и обратно. — Равностранъ тругалъ дакле заедно є и равноуголанъ.

111.

Настав. II. *Два триугла слажусе, кадъ су све три стране поособъ соотвѣтственне међусобно равне.* Или фіг. 48. кадъ є $AB = aб$, $БВ = бв$, и $AВ = aв$; то є $\triangle AБВ \cong \triangle aбв$.
ф. 48.

Доказат. Кадъ се $\triangle aбв$ на $\triangle AБВ$ по соотвѣтственнимъ странама єданъ на другій положи, т. є. страна $aб$ на $AБ$, и страна $бв$ на $БВ$, то и страна $вa$ не може пасти на другу страну но управъ по страни $ВA$, и тако ће се све три стране совршено сложити и поклонити, али § 11. ч. 10; дакле.

112.

Слѣд. Кадъ су у два триугла соотвѣтственне стране међусобно равне, и углови соотвѣтственни међусобно равни быти морају.

113.

Настав. III. *Два триугла слажусе, кадъ се у нъима два угла са заваћеномъ страномъ међусобно равна нализе.* Или фіг. 48. кадъ су углови $б$ и $в$ равни угловима $Б$ и $В$, и кадъ є страна међу нъима заваћена $бв =$ страни $БВ$, то и $\triangle aбв \cong \triangle AБВ$.
ф. 48.

Доказат. Кадъ се $\triangle aбв$ по равной страни $бв$ положи на $\triangle AБВ$, страна ће $бв$ положена на страну $БВ$ као нъой равна, ню совершено поклопити, угалъ *в* као углу *В* раванъ, пасти мора на угалъ *В* и нѣга совершено поклопити, а тако исто и угалъ *б* мора поклопити угалъ *Б*. Но кадъ по § 27. величина углова зависи одъ нагибаня или разшириваня кракова, и кадъ се две лініе само у єдной точки ударити и пресећи могу, то се и стране *ав* са *АВ* (збогъ равногъ угла *в* и *В*), и *аб* са *АБ* (збогъ равногъ угла *б* и *Б*) у точки *А* ударити и пресећи мораю; слѣдователно и угалъ $а =$ углу *А*, али такови су триугли по § 106. подобни и равни; дакле $\triangle\, абв \cong \triangle\, АБВ$.

114.

Наставл. *У свакомъ триуглу сва три угла скупа равни су двома деснима.* Или у $\triangle$ *АБВ* фіг. 49. сва три угла $А + Б + В$ имаю за мѣру 2Д, или 180°. ф. 49.

Доказат. Кадъ се опише $\triangle$ *АБВ* окружіемъ (сматраюћи две стране као тетивке по § 72.), угалъ *А* имаће за мѣру $\frac{1}{2}$ лука *БВ* по § 80., угалъ *Б* има $\frac{1}{2}$ лука *АВ* (изъ истога узрока), угалъ *В* пакъ $\frac{1}{2}$ лука *АБ*;

Дакле сва три угла $А + Б + В$ имаю за мѣру $\frac{1}{2}\,БВ + \frac{1}{2}\,АВ + \frac{1}{2}\,АБ$ или полуокружіе; слѣдователно по § 22. 2Д, или 180°.

115.

Слѣдства. 1. У триуглу само єданъ десанъ или єданъ тупый угалъ быти може. Єръ бы иначе сва три угла выше имала одъ 180°.

2. Ако у каквомъ триуглу буде еданъ угалъ десанъ или тубъ, остали мораю быти оштри.

3. У триуглу десноуголномъ два угла оштра имаю скупа 90°.

4. Ако у триуглу десноуголномъ еданъ одъ оштры' углова познатъ буде, и другій се оштрый изнаћи може, мѣру познатогъ одъ 90° отузимаюћи. Одтудъ, ако еданъ одъ оштры' има 45°, толико ће имати и другій.

5. Ако у триуглу еданъ угалъ буде познатъ, отятіемъ овога мѣре одъ 180°, изнаћисе може сумма осталы' углова. И напротивъ.

6. Ако сумма два угла у некомъ триуглу позната буде, отятіемъ нѣіове мѣре одъ 180° изнаћисе може трећій угалъ.

7. Ако су некога триугла два угла пооcобъ или скупа равни двома угловима пооcобъ или скупа другога триугла, и трећій угалъ трећемъ раванъ быти мора, и обратно.

116.

Наставл. *Ако се у некомъ триуглу изъ ошиля нѣговогъ на основицу спусти отвѣсна, и углови на основицы буду оштри, она отвѣсна*
ф. 43. *мора пасти на основицу.* Или у фіг. 43. отвѣсна *АД* изъ ошиля *А* триугла *АБВ* на основицу спуштена мора пасти на основицу *БВ*.

Доказат. Да предпоставимо, да она не пада на основицу триугла, но да пада ванъ нѣ н. п. на точку *Е*, бы̂о бы у триуглу *АВЕ* угалъ *Е* десанъ § 33. а угалъ *АВЕ* тубый є (што є овога доугалъ по предпоставляню оштаръ), дакле бы у єдномъ иономъ истомъ триуглу бы̂о єданъ десанъ, и єданъ тубъ угалъ, кое є по § 115. ч. 2. невозможно; дакле.

117.

Наставл. *Ако се у триуглу тубоуголномъ изъ ошиля нѣговогъ на основицу спусти отвѣсна, она мора пасти ванъ основице.* Или у фіг. 46. отвѣсна *ВД* изъ ошиля *В* триугла *АБВ* на основицу спуштена, мора пасти ванъ основице *АБ*. ф. 46.

Доказат. Да представимо, да отвѣсна *ВД* не бы ванъ основице, но на основицу *АБ* н. п. на точку *Е* пала, то бы у $\triangle$ *АВЕ* угалъ *Е* десанъ бы̂о, а угалъ є на основици *А* тубъ, слѣдовало бы дакле, да у єдномъ иономъ истомъ триуглу єданъ угалъ буде десанъ, и єданъ тубъ, кое є по § 115. ч. 2. невозможно; дакле.

118.

Наставл. *У свакомъ триуглу већемъ углу противостои већа, а манѣмъ маня страна*; и обратно. Или у $\triangle$ *АБВ* фіг. 49. већемъ углу *А* противостои већа страна *БВ*, а манѣмъ углу *В* маня страна *АБ*. ф. 49.

Доказат. 1. Предпостављаюћи да є угалъ *А* $>$ *В*, быће и нѣгова мѣра већа одъ мѣре овога, или када се истый триугалъ опаше окружіемъ, быће $\frac{1}{2}$ лука *БВ* мѣра угла *А*, коя є $>\frac{1}{2}$ лука *АБ* (§ 80.), дакле быће и цѣо лукъ *БВ* већій одъ лука *АБ* по § 11. ч. 9, али већій лукъ затеже већу тетивку, а маньій маню по § 59. чис. 2; дакле и тетивка, или већемъ углу *А* супротна страна *БВ* већа є одъ стране *АБ*.

2. Предпоставляюћи да є страна *БВ* $>$ стране *АБ*, быће и цѣо лукъ *БВ* $>$ лука *АБ*, по § 59.; дакле и $\frac{1}{2}$ лука *БВ* $>\frac{1}{2}$ лука *АБ* (по § 11. ч. 9.), али є $\frac{1}{2}$ лука *БВ* мѣра угла *А*, и $\frac{1}{2}$ лука *АБ* мѣра угла *В*; дакле угалъ *А* $>$ *В*; дакле.

119.

Слѣдства. 1. У свакомъ триуглу дакле равнымъ угловима противустоє равне стране, и обратно. Зато

2. Ако у триуглу два угла буду равна, триугалъ є равнокракъ по § 110.

3. Ако су у триуглу сва три угла međусобно равна, триугалъ є равностранъ, и свакій угалъ има за мѣру 60°, и напротивъ у $\triangle$ равностраномъ сва три угла međусобно равна су.

4. Ако два триугла равнокрака єданъ угалъ равань буду имала, равна ће быти и остала два međусобно, дакле триугли быће подобни (§ 105). Єръ угалъ онай međусобно равный или се наоди међу двема равнима странама, или се єдной одъ овы' двею противуположенъ налази: у првомъ случаю онай само одузети валя одъ 180°; оста-

ла два угла међусобно скупа и поособъ равна ће быти (по § 115. ч. 5, и 119 ч. 1): у другомъ случаю удвоену нѣгову мѣру одузети валя одъ 180°; (§ 119. ч. 1.); трећій равань ће быти трећемъ (по § 115. ч. 6).

5. Триугалъ равностранъ є триугалъ правиланъ. Єръ осимъ равны страна и углови су у нѣму међусобно равни.

120.

Изясн. Ако се у △ *АБВ* фіг. 50. една страна *ВБ* продужи до *Д*, изродиће се ванъ триугла угалъ *АБД*, кои се у смотренію триугла *АБВ* зове *угалъ споляшный*. *ф. 50.*

121.

Наставл. *Ако се у триуглу некомъ страна нека нѣгови продужи, угалъ споляшный равань є двома внутренима супротнима скупа узетима.* Иля ако се у △ *АБВ* фіг. 50. страна *ВБ* продужи, угалъ споляшный $АБД = А + В$. *ф. 50.*

Доказ. Угли $АБД + АБВ = 2Д$ по § 43;
али и угли $АБВ + А + В = 2Д$ по § 114.

дакле угли $АБД + АБВ = АБВ + А + В$ по § 11. ч. 4.
али угалъ $АБВ = АБВ$ по § 11. ч. 1.

дакле угалъ $АБД = А + В$ по § 11. ч. 7.
а то є оно што се има доказати.

122.

Наставл. *Ако се одъ два неравна но подобна тругла маньій на векій по соответственимъ двема странама и по равномъ углу положи, трећа страна быће са трећомъ равнотекућа.* Или фіг. 51. ако се $\triangle$ *абв* на $\triangle$ *АБВ* по
ф. 51.
равномъ углу *А* и *а* положи, трећа страна *бв* быће са трећомъ *БВ* равнотекућа.

Доказат. Єръ ако се $\triangle$ *абв* на $\triangle$ *АБВ* положи, збогъ подобности ньіове угалъ *абв* или *Абв*, као споляшный, равань є углу *АБВ* као внутреномъ на єдной страни, али по § 55. такове су лініє равнотекуће;

123.

Слѣд. Дакле и обратно; ако нека лінія *бв* тако сѣче две стране *АБ* и *АВ* єднога тругла *АБВ*, да є она # на трећу страну *БВ*, два ће она тругла, коя се таковомъ лініомъ сѣчицомъ производе, быти подобна.

124.

Наставл. *Ако се у* $\triangle$ *десноуголномъ изъ десногъ угла на ипотенузу спусти отвѣсна, она ће цѣо* $\triangle$ *на два маня цѣломъ и себи подобна подѣлити.* Или ако се у $\triangle$ десноуголномъ *АБВ*
ф. 52.
фіг. 52. изъ десногъ угла *А* спусти отвѣсна *АД* па ипотенузу *БВ*, она ће подѣлити цѣо тругалъ на два маня, цѣломъ и себи подобна.

Доказат. Кадъ се спусти отвѣсна *АД* на ипотенузу *БВ*, она ће проузроковати

1. Два △ *АБВ* и *АБД* подобна збогъ сва три угла соотвѣтствено равна (§ 105.). Ерь е угалъ *Б* обштій, слѣдователно равань, угалъ *Д* у маньмъ триуглу збогъ отвѣсне *АД* десань е, дакле равань углу *А* по предпоставляню опеть десномъ у △ десноуголномъ *БАВ*, и трећій мора быти равань трећемъ по § 115. ч. 7.

2. Подобни су триугли *АБВ* и маный *АДВ*: ерь е угалъ *Д* у маломъ триуглу збогъ отвѣсне *АД* десань, слѣдователно равань десноме *А* у великомъ триуглу: угалъ *В* обштій е у оба триугла, и трећій угалъ равань е трећемъ.

3. Подобна су два триугла *АБД* и *АВД*, кое се такођеръ по предидућемъ начину збогъ соотвѣтственны' равны' углова доказати може, или слѣдствомъ овога доказателства подъ

числомъ 1) △ *АБВ* ∾ △ *АБД*, и по

числу 2) △ *АБВ* ∾ △ *АВД*

дакле △ *АБД* ∾ △ *АВД* по § 11. ч. 4.

125.

Задатакъ. *Задатый угалъ нацертати*, или фіг. 53. задатый угалъ *БАВ* сочинити. *ф*. 53.

Разрѣш. Пошто смо праву лінію *ав* повукли, треба у задатомъ углу *БАВ* изъ ошиля угла *А* написати лукъ *БВ* полупречникомъ *АБ*, и овымъ истымъ отваранѣмъ шестара изъ крайнѣ точке *а* повучене лініе *ав* пресецаюћи исту лінію написати лукъ *бв*, затимъ međу краке шестара узети тетивку *БВ*, и овомъ тетивкомъ пресѣћи лукъ *бв* у *б*, точку *а* са *б* соединяваюћи, добићемо угалъ *бав*, кои ће задатомъ *БАВ* совршено равань быти.

Доказат. По повученимъ тетивкама *БВ* и *бв*, добыћемо два триугла *АБВ* и *абв*, у коима су и стране и углови međусобно равни, али по § 106. такови су триугли подобни и равни; дакле.

126.

Задатакъ. *Надъ задатомъ правомъ лініомъ АБ* фіг. 54. *сочинити* △ *АБВ равностранъ.*
ф. 54.

Разрѣш. Забадаюћи еданъ кракъ шестара у крайню точку *А* задате праве *АБ*, другій кракъ да се отвори до друге крайнѣ точке *Б* исте праве *АБ*, и са овимъ отваранѣмъ шестара полупречникомъ *АБ* да се напишу надъ правомъ датомъ лініомъ изъ точке *А* и *Б* пресецаюћисе лукови, тако ћемо добыти точку *В*; ову *В* са точкомъ *А* и *Б* правима *ВА* и *ВБ* соединяваюћи, добићемо △ равностранъ.

Доказ. Задата страна *АБ* = *АВ* = *БВ*, ерь су то полупречници єдногъ и оногъ истогъ окружія, али таковый є △ по § 103. равностранъ; дакле.

127.

Задатакъ. *Сочинити тригалъ равнокракъ ВДЕ* фіг. 55. *кадъ є основица А и єданъ кракъ Б задатъ.* ф. 55.

Разрѣш. Повући треба праву лінію $ВД = А$, затимъ написати треба изъ *В* полупречникомъ равнымъ *Б* лукъ надъ истомъ повученомъ лініомъ *ВД*, и изъ точке *Д* овай лукъ пресећи истымъ полупречникомъ $= Б$, точку пресецаня лукова *Е* союзити правимъ лініяма *ЕВ* и *ЕД*, тако ћемо добыти пожеланый $\triangle ЕВД$ равнокракъ.

Доказ. По сочиненію $ЕД = Б$, а и $ЕВ = Б$; слѣдователно $\triangle$ у коима су две стране равне, али таковый є по § 103. равнокракъ; дакле.

128.

Задат. *Задатоме АБВ тригу* фіг. 56. *другій абв подобанъ и равань начертати.* ф. 56.

Разрѣш. Пошто смо праву $бв = БВ$ основицы повукли, треба међу краке шестара узети лінію *БА*, и сотимъ истимъ отваранѣмъ шестара изъ точке *б* надъ лініомъ *бв* назначити лукъ неопредѣленый, затымъ узети међу краке шестара лінію *АВ* и изъ точке *в* пре назначеный лукъ пресећи, тако ћемо добыти точку *а*, ову точку *а* правима *аб* и *ав* са точкомъ *б* и *в* соединяваюћи, добыћемо $\triangle абв \cong \triangle АБВ$.

Доказ. Пошто су соотвѣтствене стране а и углови по сочиненію међусобно равни, ясно слѣдуе, да су овакови △ подобни и равни.

ГЛАВА ШЕСТА.

О СВОЙСТВАМА ТЕТРАГОНА.

129.

Изясненіе. *Тетрагонъ*, иначе *четвороуголникъ*, или *фігура четворострана* зовесе одъ четиръ праве лініе заключеный просторъ (§ 97.).

130.

Изясненіе. 1. Тетрагонъ вообште на параллелограммъ и на трапезіюмъ право поделитисе може. *Параллелограммъ* е вообште такова фігура четворострана, у коіой су две и две су-
ф. 57. протне стране равнотекуће фіг. 57.

2. Параллелограммъ поособъ зовесе *квадратъ* (Геометрическій), у коме су све четири стране
ф. 58. фіг. 58. $AБ = БГ = ГВ = ВА$ међусобно равне, и сва четиръ угла равна т. е. десна, слѣдователно кадъ е четвороуголникъ правиланъ (§ 98.).

3. Ако су сви углови равни дакле десни, но ако су стране две и две равнотекуће равне, зо-
ф. 57. весе параллелограммъ *десноуголанъ* као у фіг. 57.

4. *Ромбъ* є параллелограммъ, у коме су све четиръ стране međусобно равне, но углови два и два супротна равна као у фіг. 59. *ф.* 59.

Ромбоідъ зовесе таковый параллелограммъ, у коме су две и две супротне стране равнотекуħе равне, а тако два и два супротна угла равна, као у фіг. 60. *ф.* 60.

6. *Трапезій* вообште зовесе свака фігура четворострана, у коме су две стране супротне равнотекуħе (но и неравне быти могу), а остале две неравнотекуħе, као у фіг. 61. *ф.* 61.

7. *Трапезоідъ* зовесе она четворострана фігура, у коіой никакве стране равнотекуħе неналазесе, као у фіг. 62. *ф.* 62.

131.

Изясней. *Двоуголна* (diagonalis, діягонолна *διαγώνιος*) зовесе она изъ єдногъ угла на другій супротный повучена права лінія, као *АВ* у фіг. 57. Но (премда погрешно, али краткости ради) подъ унакрстномъ разумевают сваку праву изъ єдногъ угла у каквомъ многоуголнику на другій противоположеный повучену, т. є. коя два угла соєдинява, и нъи дѣли на двое. *ф.* 57.

132.

Наставл. *Сва четиръ угла у свакомъ тетрагону скупа имаю за мѣру* 4Д *или* 360°. Или у фіг. 57. и 59. сва четиръ угла $A + Б + В + Д$, скупа имаю за мѣру 4Д или 360°. *ф.* 57. 59.

Доказат. По новученой двоуголной *АВ* цео се параллелограммъ дѣли истомъ правомъ на два триугла *АВБ* и *АВД*, у коима су свакомъ поособъ сва три угла = 2Д или 180° (§ 114.); дакле у оба триугла скупа или цѣломе тетрагону сва четирь угла имаю за мѣру два путъ толико, т. є. 4Д, или 360°.

133.

Слѣдства. Ако задата буду 1) една страна четвороуголника: 2) две додираюћесе стране параллелограмма десноуголногъ: 3) една страна са еднымъ угломъ ромба: 4) две додираюћесе стране рамбоіда са еднымъ угломъ или заваћенымъ или приключенымъ, цео се тетрагонъ опредѣлити и сочинити може (§ 56.).

134.

Настав. *Свакій се параллелограммъ дѣли двоуголномъ на два триугла* АВБ *и* АВД
ф. 57. фіг. 57. *меѣусобно подобна и равна.*

Доказат. Єръ пошто є страна *АБ* ⌗ *ДВ*, угалъ $м = н$, и $х = о$ по § 54.; дакле триугли *АВБ* и *АВД* имаю два угла равна *м*, *н*, и *х*, *о* са заваћеномъ страномъ *АВ*, али такови су триугли по § 113. подобни и равни; дакле △ *АВБ* ≅ △ *АВД*, а то є оно што се доказати имало.

135.

Слѣдства. 1. *У* параллелограмму сваке су две стране супротне не само равнотекуће, него и равне. Єрь кадъ се △ *АВД* помысли да се положи на △ *ВАБ*, по соотвѣтственимъ странама, слажусе стране како *БВ* и *ДА*, тако *АБ* и *ВД*.

2. Ако дакле у каквомъ тетрагону две супротне стране буду равне и равнотекуће, и остале ће две стране быти међусобно равне и равнотекуће, слѣдователно таковый ће тетрагонъ быти параллелограммъ.

3. Две (или выше) лініе равнотекуће, одъ двею равнотекући завађене, равне су, быле ове на оне отвѣсне или косе.

4. Кадъ двоуголна дѣли параллелограммъ на два тругла подобна и равна (§ 134.) равне основе *АБ* = *ВД* (по овога § ч. 1.), и равне высине *ВБ* = *АД* са параллелограммомъ имаюће (по § 51., 102.), свакій се тругалъ сматрати може као половина параллелограмма єднаке основице и высине. Одтудъ

5. Два тругла подобна као половине два параллелограмма подобна право сматратисе могу.

136.

Задатакъ. *Надъ задатомъ правомъ А* фіг. 63. *начертати квадратъ.* ф. 63.

Разрѣшен. Начертати треба десанъ угалъ *БВД*, сочинити $ВК = ВЕ = А$, и повуħи $КГ \# ВД$ и $ЕГ \# ВБ$, тако ħемо пожеланый квадратъ *КВЕГ* добыти.

Доказател. Ова є фігура збогъ $ЕГ \# ВБ$ и $ВЕ \# КГ$ параллелограммъ, а збогъ $ВЕ = ЕГ = ГК = КВ = А$ равнострана фігура четвероуголна, и збогъ десногъ угла $КВЕ = ВЕГ = ЕГК = ГКВ$ квадратъ или тетрагонъ правиланъ (§ 130.), кое су свойства нѣгова.

137.

ф. 64. Задатакъ. *Начертати квадратъ, у коме є двоуголна задатой правой лініи А равна* фіг. 64.

Разрѣш. Повуħи треба праву *БК*, и изъ крайнѣ нѣне точке *Б* подиħи отвѣсну *БН*, тако ħемо добыти угалъ *НБК* десанъ; овай по § 30. двопресеħи, точку пресецаня *Д* са *Б* соединяваюħи неопредѣленомъ дужиномъ правомъ *БД*; па ову праву пренети задату лінію двоуголну $А = БД$; изъ точке *Д* на повучену праву *БК* спустити отвѣсну (по § 18.) $ДВ = БВ$; коя ħе быти иста $ДВ \# БН$; тако исто изъ точке *Д* повуħи $ЕД \# БВ$, тако ħемо добыти пожеланый квадратъ.

Доказат. Доказателство слѣдуе изъ самогъ сочиненія.

138.

Задатакъ. *Начертати параллелограммъ АБГВ десноуголанъ, кога ће две стране равне быти задатымъ двема странама* a *и* $б$ фіг. 65. $ф$. 65.

Разрѣш. Неопредѣлене дужине повући треба праву $АД$, и изъ крайнѣ точке $А$ подићи отвѣсну $АИ$, затимъ дату лінію a пренети на $АД$ до $АБ = a$, а лінію $б$ пренети на подигнуту отвѣсну тако да буде $б = АВ$; изъ точке $В$ повући лінію $ВГ \# АБ$, а изъ точке $Б$ лінію $БГ \# АИ$, тако ћемо добыти квадратъ, кои ће пожеланимъ условіама соотвѣтствовати.

Доказат. Доказателство є изъ сочиненія увиђавно.

139.

Задатакъ. *Начертати ромбъ, у коме бы стране задатой лініи* a, фіг. 66. *равне быле.* $ф$. 66.

Разрѣш. Повући треба поволне дужине праву Bx, и на ню пренети задату праву $a = ВД$, подићи изъ поволне точке ове праве лініе н. п. изъ $Д$ отвѣсну $ДЕ = б$, повући $ФГ \# Bx$, написати изъ $В$ са полупречникомъ $А$ лукъ $мн$, коій ће праву $ФГ$ у $Н$ пресећи, и повући $ДК \# ВН$, добыћемо пожеланый $ВДКН$ ромбъ.

Доказ. Доказателство є изъ сочиненія увиђавно.

140.

Задатакъ. *Начертати ромбоідъ, у коме бы две разне стране двема задатимъ странама а и б, и одъ ньи заключеный уголъ, задатомъ*
ф. 67. *углу Д раванъ было*, фіг. 67.

Разрѣш. Начертати треба △ *АДВ*, у коме бы обе задате праве двема странама т. е. *а* = *ДВ*, а *б* = *ДА* было, тако да угалъ *АДВ* = углу *Д* буде, затимъ изъ овога триугла допунити валя параллелограммъ, тако ће ово пожеланый ромбоідъ быти.

Примѣчаніе. По основаніяма досадъ изложенымa моћиће ученикъ свакій задатакъ разрѣшити.

ГЛАВА СЕДМА.

О СВОЙСТВАМА ПОЛИГОНА ВООБШТЕ ОСТАЛЫ.

141.

ф. 68. Наставл. *Свакій се полигонъ АБВДЕ* фіг. 68. *може правымъ лініяма, изъ неке унутри находећесе точке 0 къ свакомъ углу полигона повученимъ, на толико триуглова подѣлити, колико полигонъ страна има.*

Доказат. Доказателство є очевидно, кадъ се изброє како стране полигона, тако и тругли, на коє се по наставленію полигонъ дѣли.

142.

Наставл. *Сви углови свакога полигона имаю за мѣру толико пута* **2Д** *(или 180°), колико у полигону страна има, манѣ* **4Д.**

Доказат. Свакій се полигонъ може правима фіг. 68. изъ поволне неке унутрашнѣ точке къ свима угловима нѣговимъ повученымъ (§ 141.) на толико труглова подѣлити, колико є у полигону страна, али свакога овога тругла сва три угла скупа имаю за мѣру 2Д по § 114.; дакле свію овы' трутлова угли скупа имаю за мѣру толико пута 2Д, колико є страна у полигону, али угли, кои се око унутрашнѣ поволне точке *o* наоде, непринадлеже къ угловима полигона (єръ се овога угли при омѣрію налазе); дакле овы мѣра (по § 44. ч. 2.) 4Д одъ мѣре свію углова одузетисе мора, да бы се мѣра свію углова полигона придобити могла; дакле. *ф. 68.*

143.

Слѣд. Ако бы дакле имали полигонъ правиланъ (у коме су сви углови међусобно равни) и хотели бы знати обштій угалъ нѣговъ, то треба сумму степена свію углова нѣговы' раздѣлити чрезъ число углова или страна нѣговы' (§ 23).

144.

Настав. *У полигону правилномъ находисе точки, коя одъ ошиля свію углова полигони*
ф. 69. *равноотстои.* Или у фіг. 69. точка C равноотстои одъ ошиля свію углова $АБВДЕК$.

Доказат. Да се двопресѣку (§ 76.) два найближа угла A и $Б$ полигова правима AC и $БC$; точка C, у коiой се лініе, углове двопресецаюће, пресецаю, точка є пожелана. Єръ кадъ се изъ пресецаня точке C на све углове полигона повуку праве CB, $CД$, CE, CK, оне, као отстоянiе точке C одъ ошиля углова по § 42. мѣреће, све су равне. Єръ полигонъ овымъ правымъ лініяма дѣлисе на триуглове меѣусобно равне и подобне, и нѣiове су стране равне отстоянію точке C одъ углова полигона. Тако є $\triangle\, АCБ \cong \triangle\, БCB$ збогъ обште стране $БC$, и стране $AБ = BБ$ (§ 68.), и збогъ угла $x = ю$ (као половине угла $Б$); дакле страна $CA = CB$, и пошто є угалъ o (као половина двопресѣченогъ угла A) раванъ углу x, то є и $CA = CБ$ по § 119. ч. 1; тако и о осталима; дакле $CA = CБ = CB$ и проч.

145.

Слѣдства. 1. Свакій се полигонъ правиланъ описати може окружіемъ, прелазећимъ преко ошиля углова полигова, єръ и све окружія точке одъ средоточія равноотстоє.

2. И у свако се окружіе може полигонъ правиланъ сочинити.

3. Кадъ се изъ полигона правилногъ среднѣ точке или средоточія повуку праве лініе на углове полигона, оне дѣле 1) углове полигона правилногъ на двое: 2) дѣле цѣо полигонъ на толико подобны и равны, и равнокраки тругла-ва, колико е страна у полигону.

4. Обратно кадъ се углови некогъ полигона правилногъ правыма на двое дѣле, оне пролазе преко средоточія нѣгова, или преко средоточія уписаногъ окружія.

146.

Изясен. Средня точка полигона правилногъ, коя одъ ошиля триуглова полигона правилногъ равноотстои, и коя се са средоточіемъ описаногъ окружія слаже, краткости ради зовесе *средоточіе полигона правилногъ.*

147.

Задатакъ. *Полигонъ правиланъ опасати окружіемъ.* Или фіг. 69. Полигонъ $АБВДЕК$ опасати окружіемъ. *ф.* 69.

Разрѣшеніе. Да се двопресѣку два найближа угла $А$ и $Б$ по § 144. правыма $АС$ и $БС$, точка $С$, у коій се оне удараю, опредѣлюю средоточіе $С$, и зрачацъ $СА$ повуђисе имаюћегъ окружія. (Средоточіе и зрачацъ овога повуђисе имаюћегъ окружія добытисе може такоћеръ, кадъ се две додираюћесе стране, као тетивке сматраю, и двопресѣку, као што смо кодъ триугла видили § 72. и 114. доказателствомъ.

148.

Слѣдства. 1. Свака страна полигона правилногъ затеже у окружію круга описаногъ равань лукъ, т. є. опредѣлително лукъ одъ толико степеній, колико показуε количникъ рѣшителный, произлазећій изъ дѣленія 360 степеній чрезъ число страна. Дакле.

2. Страна ексагона (шестоугла) правилногъ затеже лукъ одъ 60 степеній. Одтудъ страна $AБ$ ексагона правилногъ равна є полупреч-
ф. 69. нику CA фіг. 69. Єръ у $\triangle ACБ$ угалъ $C = 60^0$; дакле $o + x = 120^0$ (§ 115. ч. 5.), и збогъ $CA = CБ$ угалъ $o = x = 60^0$; дакле и $AБ = CA$ по § 119. ч. 1.

149.

Задатакъ. *У окружіє начертати триугалъ, четвороугалъ и шестоугалъ правилный.*

Разрѣшеніє. Страна шестоугла правилногъ, равна є полупречнику по § 148. ч. 2; да-
ф. 70. кле узети треба полупречникъ фіг. 70. и по окружію пренети га, бележећи краковима шестара свакога пренешеногъ полупречника точке, koε кадъ се соєдине правима, добыћемо 1) пожела-

ный шестоугалъ правилный; ако ли пакъ по едну точку изоставимо, па другу соединимо, т. е. *АВЕ*, добыћемо 2) триугалъ правилный (§ 58. 59). 3) Да бы смо у окружіе начертати могли четвороугалъ правилный, треба поставити пречникъ еданъ на другій отвѣсно, и ньіове крайнѣ точке правима фіг. 71. *АБ, БВ, ВД, ДА* союжа- ф. 71.
вајући, добыћемо тетрагонъ правилный.

150.

Слѣд. Двопресецанѣмъ лукова одъ страна полигона правилногъ затегнуты можесе число полигона правилногъ свагда удвоити; тако ако се страна тетрагона правилногъ двопресѣче, добыћемо фігуру осмострану, после ако се и те стране двопресѣку, фігуру одъ 16 страна, после 32 стране и т. д.

151.

Задатакъ. *У полигонъ правилный написати окружіе. Или у полигонъ* фіг. 72. *АБВДЕ* ф. 72.
написати окружіе.

Разрѣш. Двопресецанѣмъ двею найближи полигона правилногъ страна *АБ* и *АЕ* отвѣсно и на двое по § 49.; точка у којой се двопресецајуће лініе ударају, опредѣлюе средоточіе и зрачацъ уписатисе имајућегъ окружія (§ 66. ч. 2).

152.

Задатакъ. *У триугалъ задатый АБВ* фіг. ф. 73.
73. *уписати окружіе.*

Разрѣш. Двопресеѣи треба два угла триуголника задатога н. п. *Б* и *В*, тако ѣе се двопресецаюѣе лініе у некой точки *С* пресѣѣи. Изъ ове точке *С* повуѣи на едну страну триугла н. п. *БВ* отвѣсну *СЕ*; ова ѣе быти зрачацъ, а точка *С* средоточіе пожеланогъ окружія.

Доказателство е изъ предидуѣи увиђавно.

153.

Задатакъ. *У задатый квадратъ* ***АБВД***
ф. 74. фіг. 74. *уписати окружіе.*

Разрѣш. Треба повуѣи двоуголне *АВ* и *ДБ*, кое ѣе се у едной точки *С* ударити к пресеѣи. Изъ ове точке *С* на едну страну квадрата спустити отвѣсну н. п. *СЕ*, ова ѣе *СЕ* быти зрачацъ, и точка *С* средоточіе уписатисе имаюѣегъ окружія.

154.

Настав. *Ако се у полигонима подобнима изъ углова соотвѣтственны' равны' на супротне повуку двоуголне, оне ѣе полигона раздѣлити на триуглове подобне.*

Разрѣш. Да буду полигова ***АБВДЕ*** и *абвде*
ф. 75. фіг. 75. подобна; зборъ соотвѣтственны' углова *А* и *а*, *Б* и *б*, *В* и *в*, *Д* и *д*, *Е* и *е*, равны', и све стране соотвѣтствене имаю оно исто међусобно нагибанѣ; тако страна *ДЕ* има оно исто нагибанѣ на *ДВ*, кое има страна *де* на *дв*, равнымъ начиномъ *АЕ* има оно исто нагибанѣ на *ЕД* и

ДБ, кое има *ае* на *ед* и на *дб* и. т. д; ако се дакле изъ соотвѣтственны равны угλова као *Д* и *д* повуку двоуголне на супротне углове, стране соотвѣтствене полигона у смотренію сосѣдны двоуголны равнымъ начиномъ едно или равно нагибанѣ имати мораю, али стране *АЕ* нагибанѣ са двоуголномъ *ДА* изражава угалъ *ЕАД*, а стране *ае* нагибанѣ са двоуголномъ *да* изражава угалъ *еад*; тако стране *ЕД* нагибанѣ са двоуголномъ *ДА* изражава угалъ *ЕДА*, стране *ед* нагибанѣ са *да* представля угалъ *еда*; дакле углови *ЕАД* и *еад*, као *ЕДА* и *еда* осимъ углова *Е* и *е* (и онако равны као полигона подобны соотвѣтственны) равни су; слѣдователно $\triangle$ *АДЕ* $\sim$ *аде* по § 100. Тако исто и $\triangle$ *АБД* $\sim$ *абд* и тако далѣ у свакимъ полигонима подобнима.

155.

Слѣд. Дакле полигона (обратно), коя се діагоналнима, изъ углова соотвѣтственно равны на супротне повученыма, на тругле раздѣлюю, међусобно подобна су.

156.

Настава. *Ако се одъ два подобна неравна полигона маньій на већій по соотвѣтственнимъ двема странама и по завађеномъ равномъ углу сложно положи, остале стране быће међусобно равнотекуће.*

ф. 76. Доказат. Да представимо себи фіг. 76. да се полигонъ манъій *абвдек* на веһій *АБВДЕК* по соотвѣтственнимъ двема странама *АБ* и *АК* на равань угаль *БАК*, и изъ истога угла *А* да се на супротне повуку двоуголне *АВ*, *АД*, *АЕ*, быһе трнугли *АБВ* и *абв*, а такоһеръ *ВАД* и *вад* и проч. подобни; дакле соотвѣтственни углови *АВД* и *авд* и проч. кои су споляшньи и унутарньи на єдной страни, меһусобно равни, слѣдователно и стране *бв* ⌗ *БВ*, *вд* ⌗ *ВД*, и проч.

ГЛАВА ОСМА.

О СОРАЗМѢРНОСТИМА ЛІНІЯ.

157.

Настав. *Ако се у триуглу на неку страну повуче равнотекуһа, остале две стране пресецаюһа, быһе одсѣчія изъ ошиля узета, цѣлимъ*
ф. 77. *странама соразмѣрна.* Или фіг. 77. Ако се у △ *АБВ* повуче *ДЕ*, остале две стране пресецаюһа, быһе *АД* : *АБ* = *АЕ* : *АВ*.

Доказат. По повученимъ двоуголнима *ДВ* и *ЕБ*, быһе △ *ДЕБ* = △ *ЕДВ* збогъ єдне основице *ДЕ* меһу равнотекуһима наодеһесе, на коіой они почивају. Ако се свакоме одъ овы трнуглова дода △ *АДЕ*, быһе опетъ △ *АДВ* = △ *АЕБ*

(§ 11. ч. 7.). Триугли пакъ $AEД$ и $AEБ$ имаю едну высину; еръ имаю ошиля у оной истой точки E, и основице ону исту праву $AБ$ (§ 38. 102.); Равнымъ начиномъ $\triangle AДE = \triangle AДB$ зато, што ошиля у обштой точки $Д$ имаю, а основице исту праву AB, имаю едну высину, дакле бы҆ће соразмѣрность $\triangle AEД : \triangle AEБ = AД : AБ$,

и $\triangle AДE : \triangle AДB = AE : AB$; но будући да су у овима двема соразмѣрностима предидућа два отношенія међусобно равна; дакле и послѣдуюћа равна быти морају, или $AД : AБ = AE : AB$, а то е оно што се имало доказати.

158.

Слѣдства. I. Но и одсѣчія, међу равнотекућима наодећасе, соразмѣрна су као 1) цѣлимъ странама, тако 2) одсѣчіяма, изъ ошиля узетимъ. Еръ 1) постоећа соразмѣрность $AД : AБ = AE : AB$ преобраћуесе у ову $AБ - AД : AБ = AB - AE : AB$, али $AБ - AД = ДБ$, и $AB - AE = EB$ (као што се изъ фігуре види), дакле (равна на мѣсто равны' постављајући) быва $ДБ : AБ = EB : AB$. 2) Постоећа соразмѣрность $AД : AБ = AE : AB$ промењуесе и на ову $AБ - AД : AД = AB - AE : AE$, али $AБ - AД = ДБ$, а $AB - AE = EB$; дакле $БД : AД = EB : AE$.

II. Ако се дакле у триуглу некомъ на неку страну $БB$ фіг. 78. повуку ма колико равнотекућій лінія, свака одсѣчія међу двема равноте- ф. 78.

кућима наодећасе, соразмѣрна су одсѣчіяма међу другима равнотекућима наодећимсе, као *ДБ : КБ = ЕВ : ГВ*, или *ДК : КБ = ЕГ : ГВ* и проч.

159.

Слѣд. И обратно, ако дакле лінія права две стране триугла тако сѣче, да су одсѣчія или сама себи или цѣлимъ странама соразмѣрна, права она на трећу є триугла страну равнотекућа.

160.

ф. 78. Задатакъ. *Лінію АБ* (фіг. 78.) *на толико частій, колико друга задата права АВ показуе, соразмѣрно сѣћи.*

Разрѣш. Да се союзе дате две праве *АБ*, *АВ* подъ поволнимъ угломъ *А*, и ньіове крайнѣ точке *Б* и *В* да се союзе правомъ *БВ*, на коюизъ задате праве *АВ*, на нѣне части поделѣне, точака дѣленя *Е*, *Г* и проч. да се повуку равнотекуће *ЕД*, *ГК* и проч.; ове ће сѣћи дату праву *АБ* на пожелане части. Єръ є *АД : АЕ = ДК : ЕГ* или = *КБ : ГВ* (§ 158.).

161.

Настава. *Кадъ у некомъ триуглу права угалъ некій двопресѣца, она ће иста сѣћи страну противуположену на два одсѣчія, другимъ*
ф. 79. *двема странама соразмѣрна.* Или фіг. 79.

Кадъ у $\triangle$ *АБВ* права *АГ* угалъ *БАВ* двопресѣца, она ће сѣћи и страну противуположену *БВ* тако да буде *БГ* : *ГВ* = *БА* : *АВ*.

Доказат. Да се продужи страна *БА* неопредѣлено, и на ту да се пренесе страна *АВ* тако, да буде *АД* = *АВ*, и точка *Д* да се союзи са точкомъ *В* правомъ *ДВ*; быће права *АГ* на *ДВ* равнотекућа; еръ є угалъ x као споляшный (у смотренію *АГ* и *ДВ*) = $м$ внутреномъ на єдной страни; а угалъ *БАВ* (као споляшный у смотренію $\triangle$ *ДАВ*) = $м + н$ по § 121., или кадъ є збогъ стране *АД* (по сочиненію) = *АВ*, быва и угалъ $м = н$ (§ 119. ч. 1.), то *БАВ* = $м + м$ (равна на мѣсто равны поставляюћи) = $2м$, слѣдователно оба члена уравненія чрезъ 2 дѣлећи, быва $\frac{1}{2}$ *БАВ* = $м$, али $\frac{1}{2}$ *БАВ* = x (по предпоставляню права *АГ* двопресѣца угалъ *БАВ*), дакле $x = м$. Одтудъ дакле, кадъ є у $\triangle$ *БВД* права *ГА* ⌗ *ВД*, то є онда *БГ* : *ГВ* = *БА* : *АД*, или на мѣсто *АД* поставляюћи *АВ*, быва *БГ* : *ГВ* = *БА* : *АВ*.

162.

Настав. *Триуглова подобны стране су соотвѣтствение сразмѣрне.* Или фіг. 51 у $\triangle$ $\triangle$ *ф.* 51.
АБВ и *абв* стране су соотвѣтствение соразмѣрне.

Доказат. Кадъ се $\triangle$ *абв* на $\triangle$ *АБВ* по равномъ углу и по соотвѣтственимъ странама положи, быће трећа страна *бв* ⌗ *БВ* § 122.; дакле быће *АБ* : *Аб* = *АВ* : *Ав* § 156., али *АБ* = *аб*, и $AB = ав$, дакле $АБ : аб = AB : ав$, или промењюћи $АБ : AB = аб : ав$. А тако исто и $АБ : аб = БВ : бв$, и $БВ : бв = AB : ав$.

163.

Слѣд. Кадъ су дакле у триуглима подобнима сваке две стране око равны' углова соразмѣрне, и обратно триугли, кои око равны' углова имаю две стране соразмѣрне, подобни су.

164.

ф. 80. Задатакъ. *Къ датимъ трима лініяма, четврту соразмѣрну изнаћи.* Или фіг. 80. да буду дате три лініе $Аб$, $Ав$, $Аг$, четврту соразмѣрну $АД$ изнаћи.

Доказат. Да се союзе неке две неопредѣлене дужине лініе подъ поволнимъ угломъ $А$, и на єдну овы' страна да се пренесу прве две лініе н. п. $Ав$ на $АВ$ и $Аб$ на $АБ$, на другу страну оны' повучены' лінія да се пренесе трећа задата лінія $Аг$ на $АГ$, и изъ $В$ на $БГ$ да се повуче $\#$ $ВД$; быће $АД$ пожелана четврта соразмѣрна.

Доказ. Єръ є збогъ $БГ \# ВД$ осимъ общтегъ угла $А$, уголъ $АБГ = АВД$, а сотымъ и трећій трећемъ раванъ т. є. $АГБ = АДВ$, слѣдователно $\triangle АБГ \sim \triangle АВД$, али у подобнима триуглима стране су соотвѣтствене соразмѣрне (§ 162.); дакле $АБ : АВ = АГ : АД$. кое се имало доказати.

165.

Слѣд. Равнимъ начиномъ и трећа на задате две праве соразмѣрна изнаћисе може, кадъ се друга, пошто є већъ на єданъ кракъ назначенога угла пренешена, и на другій іошть єданпутъ пренесе, и проча по предидућемъ разрѣшенію сочинесе.

166.

Задатакъ. *Дату праву ДЕ* фіг. 81. *на неколико н. п. на три равне части подѣлити.* фіг. 81.

Разрѣш. Да се повуче права нека *АБ* поволне дужине, и на ню да се пренесу три (или толико, на колико се частій права подѣлити има) равне части поволне величине. Ове три части *АБ* скупа узимаюћи међу краке шестара да се нъоме сочини △ равностранъ *АБВ*, па онда узети треба задату праву *ДЕ* међу краке шестара и ню на оба крака сочинѣнога тругла изъ ошиля пренети, да $ВД = ВЕ = ДЕ$, после изъ ошиля угла *В* да се повуку на точке дѣленя *К* и *Г*, праве *ВК*, *ВГ*; лінія задата *ДЕ* у сочинѣноме триуглу *ВДЕ* дѣлисе или сѣчесе правима *ВК*, *ВГ* у *х* и *ю* на пожеланѣ три равне части тако да є $Дх = хю = юЕ$.

Доказ. 1. Тругалъ *ВДЕ* збогъ $ВД = ВЕ$ (по сочиненію) равнокракъ є, и збогъ обштегъ угла *В* подобанъ △ *ВАБ* (§ 119. ч. 4.), слѣдователно угалъ *ВДЕ* = *А*, и угалъ *ВЕД* = *Б* (§ 122.), али у △ *ВАБ* равностраномъ (по сочиненію) угалъ *А* = *Б* = *В* (§ 119. ч. 1. ч. 3.); дакле и у △ *ВДЕ* угалъ *Д* = *Е* = *В*; слѣдователно и △ *ВДЕ* равностранъ є, и тако *ДЕ* = *ДВ* = *ВЕ*.

2. Тругли *ВКА* и *ВхД* подобни су; еръ є угалъ *В* у оба обштій, а *Д* = *А* (по предидућемъ доказат.), дакле и трећій трећемъ *Е* = *Б* (§ 115. ч. 7.); одтудъ *АК* : *АВ* = *Дх* : *ДВ* (§ 162.), али *АК* = $\frac{1}{3}$ *АБ* = $\frac{1}{3}$ *АВ* (по сочиненію); дакле и *Дх* = $\frac{1}{3}$ *ДЕ* = $\frac{1}{3}$ *ДВ*. Равнимъ начиномъ у △ *ВГА* и △ *ВюД* подобнима *АГ* : *АВ* = *Дю* : *ДВ*, али *АГ* = $\frac{2}{3}$ *АБ* = $\frac{2}{3}$ *АВ*; дакле и *Дю* = $\frac{2}{3}$ *ДЕ* = $\frac{2}{3}$ *ДВ* и проч. дакле *Дх* = *хю* = *юЕ*.

167.

Наставл. *Кадъ се у тругл*у *десноуголномъ изъ десногъ угла на ипотенузу спусти отвѣсна, она ће быти средня соразмѣрна међу*
ф. 82. *ипотенузе одсѣтіяма.* Или фіг. 82. у △ *БАВ* десноуголномъ отвѣсна *АГ* средня є соразмѣрна. т. є. *ГБ* : *АГ* = *АГ* : *ГВ*.

Доказат. Речена линія отвѣсна дѣли цѣо тругалъ *АБВ* на два маня тругла *АГБ* и *АГВ* подобна (§ 124.), дакле (у △ *АГБ*) є *БГ* : *АГ* = (у △ *АГВ*) *АГ* : *ГВ*. (§ 162.) кое се имало доказати.

168.

Слѣд. Ако се дакле ма изъ кое окружія точке *А*. фіг. 83. спусти на пречникъ *БВ* отвѣсна *АД*, она є средня соразмѣрна међу пречника одсѣчіяма *ДБ* и *ДВ*. Єръ, кадъ се она окружія точка *А* тетивкама *АБ*, *АВ* са краєвима пречника союзи, быће △ *БАВ* десноуголанъ (по § 81. ч. 2.) са отвѣсномъ изъ десногъ угла на ипотенузу спуштеномъ (§ 124.). *ф.* 83.

169.

Задатакъ. *Међу двема датимъ правимъ лініяма средню геометрически соразмѣрну изнаћи.* Или фіг. 83. међу задатимъ двема правимъ лініяма *КГ* и *ХК* средню геометр. соразмѣрну изнаћи. *ф.* 83.

Разрѣш. Задате оне две праве да се пренесу на єдну тако, да буде $КГ + ХК = БВ$, и надъ овомъ као пречникомъ изъ среднѣ нѣне *С* као средоточія круга, да се напише окружіє, после изъ точке међусобногъ союжаваня *Д* да се подигне отвѣсна *ДА*, коя ће окружіє пресећи : она є пожелана средня соразмѣрна, или $БД : АД = АД : ДВ$ (§ 167. 168.).

170.

Наставл. *Ако се изъ точке неке на окружіє повуче єдна дирка, друга сѣчица, быће*

дирка средня геометрически сразмѣрна међу цѣломъ сѣчицомъ и нѣнымъ одсѣчiемъ ванъ
ф. 84. *окружiя находећимсе.* Или фiг. 84. Ако се повуче изъ точке *А* на окружiе дирка *АВ* и сѣчица *АБ*, бyће *АБ* : *АВ* = *АВ* : *АГ*.

Доказат. По повученимъ тетивкама *ГВ* и *ВБ*, △ *АВГ* ∾ △ *АБВ*; еръ осимъ обштегъ угла *А*, углови су *АВГ* = *АБВ* (§ 80. збогъ едне $\frac{1}{2}$ лука *ВГ* мѣре), слѣдователно и трећiй трећемъ мора быти рававъ; дакле су ово тріугли подобни, а у подобнима тріуглима стране су соотвѣтствене соразмѣрне (§ 162.), дакле постављаюћи соразмѣрность, бyће *АБ* : *АВ* = *АВ* : *АГ*, кое се доказати имало.

171.

Наставл. *Кадъ се изъ точке неке ванъ окружiя находећесе, повуку две сѣчице на окружiе, бyће нioва одсѣчiя ванъ окружiя положена, цѣлимъ сѣчицама узаймно узета соразмѣрна.*
ф. 85. Или фiг. 85. На окружiе *БВДГБ* изъ точке *А* кадъ се повуку две сѣчице *АБ* и *АВ* бyће *АБ* : *АВ* = *АД* : *АГ*.

Доказат. По повученимъ тетивкама *ГВ* и *ДБ*, △ *АДБ* ∾ △ *АГВ*; еръ имаю осимъ обштегъ угла *А*, углове *Б* и *В* равне (§ 81. ч. 3.), дакле § 115. ч. 7., а у тріуглима подобнима стране су соотвѣтствене соразмѣрне; дакле *АБ* : *АВ* = *АД* : *АГ*.

172.

Наставл. *Одсѣчія тетивака пресецаюћіисе узаймно су сразмѣрни.* Иля фіг. 86. одсѣчія *ВД* и *ДБ* тетивака *АБ* и *ВГ* пресецаюћій се узаймно су соразмѣрна т. е. $AE : BE = ДE : EБ$. ф. 86.

Доказ. По повученимъ тетивкама *ВБ* и *АД* добыћемо два триугла *АДВ* и *БАД*, кои су подобни; єръ су у нъима сва три угла међусобно соотвѣтствено равна. Угли су *ВЕБ* и *АЕД* као очелъни међусобно равни (§ 45.); угалъ *Б* = уг. *Д* збогъ єдне мѣре $\frac{1}{2}$ лука *АВ* (по § 81. ч. 3.), и угалъ *А* = уг. *В* збогъ єдне $\frac{1}{2}$ лука *БД* мѣре. Ови су дакле триугли подобни, а у подобнима триуглима стране су соотвѣтствене соразмѣрне; дакле $AE : BE = ДE : EБ$.

173.

Изясненіе. *Лінію среднъимъ и крайнъимъ отношеніемъ сѣћи* зовесе лінію на две неєднаке части сѣћи тако, да нѣна часть већа буде средня соразмѣрна међу цѣломъ лініомъ и нѣномъ частію манъомъ.

174.

Задатакъ. *Дату лінію АБ* фіг. 86′. *среднъимъ и крайнъимъ отношеніемъ сѣћи.* ф. 86′.

Разрѣш. Подизаюћи изъ крайнѣ ма кое точке н. п. *Б* дате праве лініе *АБ* отвѣсну *БМ*, коя да буде равна половини *АБ*, после са оном истомъ отвѣсномъ *БМ* као полупречникомъ изъ *М* као средоточія да се напише окружіе круга *БГВБ*, бы̓ће дата права *АБ* дирка (§ 70. ч. 1.). Далѣ изъ друге крайнѣ точке *А* задате праве *АБ* и преко средоточія *М* да се повуче сѣчица *АВ*, и одсѣчіє ове ванъ окружія положено *АГ*, да се пренесе на дату праву изъ *А* до *Д* тако, да буде $АД = АГ$; точка *Д* бы̓ће она, у коіой се дата права по искаию сѣче тако, да стои $АБ : АД = АД : ДБ$.

Доказат. По сочиненію фігуре стои
$$АВ : АБ = АБ : АГ. \text{ по § 170.}$$
дакле $АВ - АБ : АБ = АБ - АГ : АГ$ (отятіємъ променута)

али $АВ - АБ = АГ$ (по сочиненію $АБ = 2МБ$) $= ГВ$ пречнику.

Али $АВ - ГВ = АГ$;

дакле и $АВ - АБ = АГ$;

такођеръ $АБ - АГ = ДБ$ (еръ є по сочиненію $АГ = АД$),

али $АБ - АД = ДБ$, дакле

и $АБ - АГ = ДБ$:

одтудъ $АГ : АБ = ДБ : АГ$ (поставляюћи равна на мѣсто равны)

или $АБ : АД = АД : ДБ$ (на мѣсто *АГ* поставляюћи *АД*, и соразмѣрность преокретаюћи), а то є оно што се доказати имало.

175.

Наставл. *Кадъ се у триуглу равнокракомъ, кога су оба угла на основицы лежећа, свакій двоинъ угла у вр́у триугла положена, ма кои угалъ при основицы некомъ правомъ двопресѣче, истомъ ће се правомъ сѣћи страни овомъ углу супротна среднымъ и крайнымъ отношеніемъ.*

Или у $\triangle$ *АБВ* равнокракомъ фіг. 87., у коме є *Б* = 2*А*, и *В* = 2*А*, кадъ се угалъ *В* правомъ *ГВ* двопресѣче; страна супротна *АБ* сѣчесе на два одсѣчія *АГ* и *БГ* среднымъ и крайнымъ отношеніемъ тако, да быва *БГ* : *АГ* = *АГ* : *АБ*. ф. 87.

Доказат. Збогъ угла *В* двопресѣченогъ стои сораз:

БГ : *АГ* = *БВ* : *АВ* по § 171.
али *АВ* = *АБ*, равне стране,
и *БВ* = *АГ*,

дакле *БГ* : *АГ* = *АГ* : *АБ*, равна на мѣсто равны поставл: Доказатисе има да є *БВ* = *АГ*, кое се овако посведочава: у $\triangle$ *АБВ* по предреченнымъ овога свойствама угалъ є *А* = 36°, *Б* = 72°, *В* = 72° по § 114. и кадъ се цѣо угалъ *В* = 72° правомъ *ВГ* двопресѣца, и угалъ є *БВГ* = *ГВА* = 36° = *А*, а тако є и у $\triangle$ *БВГ* и угалъ *БГВ* = 72°. § 114., 115. ч. 6. слѣдователно *БВ* = *ГВ* = *АГ* § 119. ч. 1.

176.

Задатакъ. *Сочинити триугалъ равнокракъ тога свойства, да свакій уgалъ при основицы двоянъ буде угла у връ триугла наодећег' се.*

ф. 87. Разрѣшеніє. Да се кракъ $АБ$ фиг. 87. триугла $АБВ$ сѣче средньимъ и крайньимъ отношеніємъ по § 174. и одсѣчіємъ већимъ $АГ$ као полупречникомъ изъ точке пресецаня $Г$ и изъ друге одсѣчія маньгъ $ГБ$ крайнѣ точке $Б$ да се назначе пресецаюћіисе луковы у $В$, ова точка $В$ да се союзи правима са $А$ и $Б$; $\triangle$ $АБВ$ пожеланогъ свойства сочинѣнъ є.

Доказат. Да се повуче права $ГВ$; добыћемо $\triangle$ $БВГ$ равнокракъ (збогъ $ГВ = ВБ$ као $= АГ$), а скупа и подобанъ $\triangle$ $БАВ$. Єръ по предидућемъ сочиненію пошто є страна $АБ$ средньимъ и крайньимъ отношеніємъ пресѣчена, быва $АБ : АГ = АГ : ГБ$ (§ 174.), или збогъ $АГ = БВ$ быва $АБ : БВ = БВ : ГБ$ (§ 11. ч. 4.), то єсть : $\triangle$ $\triangle$ $БВГ$ и $БАВ$ имаю стране око обштегъ дакле равногъ угла $Б$ соразмѣрне, али такови су триугли подобни § 163.; дакле $\triangle$ $БВГ \sim \triangle$ $АБВ$: слѣдователно уgалъ $ВБГ$ (као обоима $\triangle$ обштій) $=$ углу $ВБА$, уgалъ $БВГ$ (као маньій угла $БВА$, у коме се онъ као часть у цѣломе содржава) $=$ углу $БАВ$ (§ 105. и 119. ч. 1.), и сотимъ уgалъ $ВГБ =$ углу $АВБ$ (§ 115. ч. 7.); єръ є уgалъ $ВГБ$ $=$ углу $ВБГ$ (збогъ $БВ = ГВ$); дакле є и уgалъ $АВБ =$ углу $АБВ$, слѣдователно страна $АВ = АБ$

(§ 119. ч. 1.), и $\triangle$ *АБВ* равнокракъ є (§ 119. ч. 2.). Далѣ угалъ *АБВ* двоянъ є угла *А*, или $= 2A$; еръ є угалъ *АБВ* или *ГБВ* (§ 27.) $=$ углу *ВГБ*, али угалъ *ВГБ* (као сполящный у смотренію $\triangle$ *АГВ*) $=$ углу $ГВА + А$ (§ 121., или *А* на мѣсто равногъ угла *ГВА* збогъ $АГ = ГВ$ поставляюћи) $= А + А = 2А$; дакле є и угалъ *АВБ* двоянъ угла *А*, или $= 2А$. Слѣдователно пожеланый тругалъ по предидућемъ разрѣшенію добро є сочинѣнъ.

177.

Задатакъ. *У окружіе уписати* 1) *декагонъ* (десетоугалъ); 2) *пентагонъ* (петоугалъ) *правилный.*

Разрѣш. Зрачацъ *АБ* окружія фіг. 88., да се сѣче среднимъ и крайнимъ отношеніемъ, одсѣчіе веће є страна декагона правилногъ, кою пренашаюћи десеть пута, точно ће цѣло окружіе зaverтити. Кадъ се дакле точке поедине сосѣдне и на окружію назначене правима соедине, добыћесе декагонъ: а ако се по една изостави, па се прва съ трећомъ и т. д. союзи правима, добыћемо пентагонъ правилный. ф. 88.

Доказат. Ако се по § 176. сочини тругалъ равнокракъ, коега є кракъ зрачацъ окружія, угалъ *А* у врӳу тругла наодећійсе, дакле и нѣговъ лукъ *БВ*, кои одсѣчіе веће полупречника затеже среднимъ и крайнимъ отношеніемъ съченогъ, содржава 36°, као што е изъ свойства овога триугла познато (§ 175.), али толико степеній затеже и страна декагона правилногъ § 148; дакле полупречника средньимъ и крайньимъ отношеніемъ сѣченога, одсѣчіе веће страна е декагона правилногъ.

178.

Задатакъ. *Полигонъ правилный, коега е*
ф. 89. *страна АБ* фіг. 89. *задата, сочинити* 1) *геометрически,* 2) *механически средствомъ преносителя* (transportatorium).

Разрѣш. 1) Изъ крайны' дате стране *АБ* точака *А* и *Б* полупречникомъ равнымъ истой страни да се назначе пресецающисе лукови у *М*, да се союзи *М* правима са *А* и *Б;* быће *АБМ* триугалъ равностранъ, слѣдователно правиланъ § 98.

Кадъ се изъ крайнњи' дате праве стране точака *А* и *Б* подигну лініе отвѣсне *АВ*, и *ВД*, датой страни равне, и точке *В* и *Д* правомъ *ВД* соединесе, добыћемо квадратъ, слѣдователно тетрагонъ правиланъ (129. и 130.).

За остала полигона правилна слѣдующій начинъ служити може: Да се упише или начерта у окружіе поволногъ полупречника полигонъ *абвде*
ф. 90. фіг. 90. поволнога вида, быће триугли у начертаномъ *амб*, и *АМБ* начертатисе имающемъ полигону (кои се као начертанъ у окружію међутимъ

представити може) међусобно подобни; слѣдователно $аб : ам = АБ : АМ$ (§ 162.), одкуда се наћи може четвртій членъ или полупречникъ *АМ* оногa окружія, у коме се дата страна точно толико пута пренети може, колико страна пожеланый полигонъ има. Кадъ смо зрачацъ *АМ* изнашли, да се назначе изъ *А* и *Б* пресецаюћисе у *М* лукови, и изъ исте ове точке *М* да се напише окружіе круга *АБВДЕА*, и на нѣга да се пренесе задата страна. Но овымъ начиномъ само се ова полигона правилна, коя се у окружіе геометрічески уписати могу, надъ задатомъ страномъ геометрически сочинити могу. Зато

2) Ова полигона правилна, коя се у окружіе геометрічески уписати немогу, механически средствомъ преносителя слѣдуюћимъ начиномъ надъ задатомъ страномъ сочиняваюсе: да се назначи у крайнѣима стране *АБ* фіг. 91. точкама *А* и *Б* *ф.* 91.
средствомъ преносителя угалъ, кои ће равaнъ быти половини сочинитисе имаюћегъ полигона углу, и изъ точке *М*, гди се стране сочинѣны углова ударaю (§ 144. ч. 4.), да се напише полупречникомъ *АМ* окружіе, на кое задату страну пренети валя толико пута, колико се захтевало.

Примѣчаніе. Неће излишно быти, ученицыма употребленіе *преносителя* или полуокружія на степене раздѣленогъ, съ коимъ се на артіи свакій угалъ сочинити може, изложити. Найпре се опредѣли угалъ сочинитисе имаюћегъ полигона по § 142. и 23. после поставити треба преноситель на задату *АБ* сочинитисе имаюћегъ полигона тако, да се средоточіе преносителя са крайньомъ точкомъ *А*, пречникъ нѣговъ са задатомъ страномъ *АБ* слаже, после изъ пречника окрайности *Е*, на задатой страни наодећегсе, починяюћи да се изчисле на преносителѣвимъ окружіемъ половина толико степеній, колико угалъ сочинитисе имаюћегъ полигона, пре тога определѣный, содржава, точка она *Д*, у коіой се полакъ числа степеній определѣногъ угла окончава, да се забележи, и преко ове да се повуче изъ *А* неопредѣлена *АДМ*. А то исто да се учини и на другомъ окрайку *Б* задате стране *АБ*. Изъ точке *М*, у коіой се *АМ* и *БМ* пресецаю, полупречникомъ *МА* да се напише окружіе круга, и на то да се пренесе дата страна *АБ* ополико пута, колико се иште, да пожеланый полигонъ сочини.

179.

Наставл. *Стране соотвѣтственне полигона подобны' соразмѣрне су.*

Доказат. Ако се изъ соотвѣтственны' углова равны' на супротне повуку двоуголие, она
ф. 75. се полигона фіг. 75. *АБВДЕ* и *абвде* цепаю на триугле подобне § 154.; дакле у △ *АДЕ*, и △ *аде* быва *ЕД* : *ед* = *АЕ* : *ае* (§ 162.), и *АЕ* : *ае* = *АД* : *ад*, и *АД* : *ад* = *АБ* : *аб*, дакле и *АЕ* : *ае* = *АБ* : *аб*; у △ *БДВ* и △ *бдв* быва *БВ* : *бв* = *ДВ* : *дв*.

180.

Настав. *Омѣрія полигона подобны' имаюсе као сваке две стране соотвѣтствене.*

Доказат. Предпоставляюћи да су полигона фіг. 75. *АБВДЕ* и *абвде* подобна; быће *АБ* ф. 75.
$: аб = БВ : бв = ВД : вд = ДЕ : де = ЕА : еа$ (§ 179.), дакле и сумма предидући' $АБ + БВ + БД$ $ДЕ + ЕА$ или омѣріе *О* имасе къ сумми послѣдуюћи' $аб + бв + вд + де + еа$ или омѣріе $о = АБ$ $: аб$ или $= БВ : бв$ и. проч.

181.

Настав. *Омѣрія полигона подобны' имаюсе такоѣеръ као сваке две двоуголне соотвѣтствителне, изъ равны' услова на супротне повучене.*

Доказ. Омѣріе едного полигова назначавающа са *О*, а другога *о*, быће у фіг. 75. $О : о$ ф. 75.
$АБ : аб$ (§ 180.), но збогъ подобны' триуглова *АДВ* и *адв* быва $АБ : аб = АД : ад$ или $БД : бд$ (§ 162.); дакле и $О : о = АД : ад$, или $= БД : бд$.

182.

Настав. *Омѣрія полигона правилны' подобны' имаюсе као полупрѣчници описаны' окружія.*

Доказат. Да назначимо фіг. 90. омѣріе ве- ф. 90.
ћега полигона са *О*, а манѣга са *о*, быва $О : о$

$=$ *АБ* : *аб* по § 180., али кадъ су $\triangle$ *АМБ* и $\triangle$ *амб* равнокраци (по § 21. ч. 1.), и због равны углова *М* и *м* (§ 148. ч. 1.) подобни (§ 119. ч. 4.), быва *АБ* : *аб* $=$ *МА* : *ма* (§ 162.); дакле *О* : *о* $=$ *МА* : *ма*.

183.

Слѣдства. 1. Окружія дакле кругова имаюсе као полупречници или пречници. Єръ се окружія сматрати могу као полигона правилна подобна, као полигона безчислены страна неопредѣлено малы, и тако међусобно равны.

2. Дакле и полуокружія, четверти окружія, и вообште сви *лукови подобни*, кои т. є. у смотренію ньіовы окружія оно исто число степеній имаю, имаюсе као полупречници. Ако се два окружія назначе са *П* и *п*, ньіови полупречници са *Р* : *р*, быва *П* : *п* $=$ *Р* : *р* (по овога § ч. 1.), одтудъ $\frac{1}{2}$ *П* : $\frac{1}{2}$*п* $=$ *Р* : *р*, или $\frac{1}{4}$ *П* : $\frac{1}{4}$*п* $=$ *Р* : *р*; и. т. д.

3. Ако дакле буде отношеніе познато, вообште међу пречникомъ и окружіемъ, као међу замѣномъ праве лініе опредѣлене, и ако се на то пособъ зада пречникъ надлежный такођеръ у равноважной лініи правой, и обратно изъ задатогъ окружія надлежный пречникъ безъ сваке теготе наћисе може. Али

Примѣчаніе. Оваково отношеніе у смислу математіческомъ опредѣлити, тегота є непобећена, и непобѣдима. Зато су многи учени мужеви тежења своя на то обратили, да бы оваково отношеніе, у колико е возможно, што ближе и совершеніе изнашли, кое бы се не само у свакой потреби обштой, но и у потреби геометрической безъ знамените рачуна погрешке употребити могло. По рачуну *Архімедовомъ* има се вообште пречникъ на окружіе као $7:22$; по рачуну *Лудолфа* (у смотренію само прве три цифре) има се као $100:314$. Оно пакъ пречника къ свомъ окружію отношеніе, кое е *Адріянъ Метій* међу списаніяма почившегъ своѓъ отца нашао, ово е као $113:355$.

На примѣръ, да намъ е задатъ пречникъ $= 14'$, кога се окружіе x тражити има у равноважной правой лініи; быће $7:22 = 14':x$, одтудъ $7x = 22 \times 14' = 308'$, и $x = \frac{308}{7} = 44'$. Или на краће, $7:22 = 14:x$, предидуће чрезъ 7 дѣлећи, бива $1:22 = 2:x$, и одтудъ $x = 2 \times 22 = 44'$.

ГЛАВА ДЕВЕТА.

О ПОВРШИНАМА.

184.

Изяснен. *Мѣрити*, зовесе отношеніе числено изнаћи међу количествомъ, кое се мѣрити има, и међу другимъ количествомъ истога рода, кое се као единица за мѣру узима (т. е. съ коiомъ се мѣри). Ова се единица зове *мѣра*. Дакле мѣрити зовесе отношенiе численo изнаћи међу мѣритисе имаюћимъ количествомъ и мѣромъ.

185.

Слѣд: Мѣра мора определѣно количество быти, слѣдователно непремѣнно, и свагда са количествомъ, кое се мѣри, равноимено. Зато се могу лiнiе лiнiяма, површине површинама, а тѣла съ тѣлама мѣрити. И одтудъ мѣра, коiомъ лiнiе мѣримо, зовесе *мѣра дужине*; а она, съ коiомъ површине мѣримо, *мѣра површиности* или *мѣра квадратна*; она пакъ, коiомъ тѣла мѣримо, *мѣра кубическа*.

186.

Изяснен. 1. Единица съ коiомъ се послужуемо при мѣри дужине, то е една права лiнiя, коя одъ прилике дужину човечiе стопе има, и зато се зове *стопа* (pes).

А за мѣренѣ дужiй лiнiя определѣна е единица, коя се зове *хватъ*, кои е 6 стопа дугачакъ. Већа отстоянiя мѣресе ланцемъ, коега е дужина 10 хватiй. Iоштъ већа отстоянiя мѣресе милямa, одъ кои' една има 4000 хватiй, или 24000 стопа.

Стопа дѣлисе на 12 равны' частiй и свака ова часть зовесе *палацъ*, палацъ на 12 *лiнiя*, а лiнiя на 12 точкiй.

За назначеніе хвата употреблюесе овай знакъ (0)

„ „ стопе „ „ „ (′)

„ „ палца „ „ „ (″)

„ „ лініе „ „ „ (‴)

и т. д.

Єдиница за меренѣ површине, та є найправилніа површина или квадратъ, коєга є свака страна равна єдной стопи, и зато се зове *стопа квадратна* (□′).

Квадратный хватъ (□°) има 36 □′, єдна квадратна стопа 144 квадратны' палаца (□″), а квадратный палацъ има 144 квадратны' лінія (□‴) и т. д.

Тако исто има квадратна миля 16,000.000 квадратны' хватій.

Єдно ютро или *данъ орания* состоисе изъ 1.600 квадратны' хватій, дакле квадратна миля има 10.000 ютара.

187.

Изясн. *Лінію неку мѣрити* зовесе изтраживати, колико ова хватій, стопа и палаца има, т. є. колико є хватій и т. д. дугачка, и оно є число, кое показує, колико се пута ова єдиница хватъ са своимъ подраздѣленіяма у овой лініи садржава, управъ *мѣра* ове лініе.

188.

Слѣд. Права се лінія дакле самимъ бройнѣмъ, колико се пута єдиница са своимъ подраздѣленіяма у ньой садржава, мѣри.

189.

Изясн. Мѣра површине є (§ 186.) стопа квадратна, дакле кадъ бы имали површину какву мѣрити, морали бы единицу (стопу квадратну) толико пута єдну до друге мећати, колико се пута то на мѣритисе имаюћой површини учинити може. Далѣ на остатакъ задате површине, коя бы маня была одъ єдве стопе, морали бы палацъ квадратный поставляти, да бы дозвати могли, колико се пута свакій родъ овы' единица у мѣритисе имаюћой површини содржава, и сотимъ се површине просторъ опредѣлює.

По будући да се мѣренѣ простора површногъ дѣйствително на другомъ мѣсту и у већой обширности (коє є предмѣтъ практіческогъ землѣмѣрія) предавати има, овде у овой части имамо мы онай начинъ геометрическій изложити, коимъ се површный просторъ помоћію рачуна изнаћи може.

190.

Наставл. *Преко три точке неуредно наодећесе, само се єдна површина равна повући може.*

ф. 92. Или фіг. 92. преко три чочке *А*, *Б*, *В* само се єдна површина равна повући може.

Доказат. Изъ *А* да се повуку праве лініє *АБ* и *АВ*, после да представимо себи, да се права *АБ* поредъ праве *АВ* движе, изродићесе вообще површина равна (§ 5.), коя преко задате три точке прелази. Да се движе далѣ ма колико пута и ма каква лінія права по *АБ* изъ *А* къ *В* по ономъ истомъ управленію *АВ*, или по *АВ* изъ *А* къ *Б* по управленію *АБ*, свагда ће се изродити површина равна, са прећашньомъ слагаюћасе, и ону исту сочиняваюћа.

191.

Слѣд. Одтудъ три точке, кое положеніе свое у правой лініи немаю, опредѣлюю станѣ, положеніе и управленіе површине праволінейне тако, да се две површине равне, као површине у три точке додирнути не могу, безъ да се небы у едну сложиле.

Примѣч. Одтудъ се види узрокъ, зашто сацакъ, асталъ или столица троногa и проч. на патосу собномъ свагди и свагда тврдо (макаръ на хоризонтъ не равнотекуће) стои, и нелюлясе, кое се са четвороногимъ свагда недогађа.

192.

Изясней. По различи движенія и управленія лініе производеће произлазе равне површине *праволінейне* или *површине равне*, ако движећасе лінія предузето движеніе свое постояннымъ управленіемъ задржи, иначе *криве* или *криволінейне*. Ова криволінейна далѣ іоштъ може быти *пупчаста* (convexa), или *дубаста* (concava), т. е. површина изпупчено узвышена, или издублѣна.

193.

ф. 57. Изяснен. Параллелограммъ *АБВД* фіг. 57. рађасе, кадъ се лінія права производећа *АБ* по управленію друге неке праве лініе *АД* движеніемъ равнотекућимъ движе, и движеніемъ своимъ трагъ за собомъ непресѣчно заоставля. Ако *лінія управителница АД* фіг. 57. буде отвѣсна на лінію или основицу производећу *АБ*, рађасе параллелограммъ десноуголанъ, ако пакъ управител-
ф. 60. ница *АВ* фіг. 60. на основицу буде косса, произведеный параллелограммъ быће косоуголанъ.

194.

Наставл. *Просторъ површный параллелограмма раванъ є производу изъ основице нѣгове и высине.*

Доказат. Єръ параллелограммъ по постанію нѣговомъ (§. предидућ.) состоисе изъ основа
ф. 57. *АБ* фіг. 57. толико пута по управителницы *АД* узетогъ, колико є у управителницы *АД* точкій, али то значи, основицу толико пута узети, колико у высини нѣговой *АД* точкій има; дакле

И то є свеєдно, или параллелограммъ бьо десноуголанъ или коссоуголанъ: єръ коссоуго-
ф. 67. ланъ *АБВД* фіг. 67. раванъ є десноуголномъ *АБИК* збогъ триуглова *АДК* и *БВП* равны.

195.

Слѣд. 1. Кадъ є тругалъ половина паралелограмма одъ оне исте основице и высине по § 134. ч. 4. *просторъ површный тругла раванъ є пола производу изъ основице и высине*; то есть: *производу изъ пола основице и высине*, или обратно, *изъ цѣле основице и пола высине*. Или

2. Да назначимо површину єдногa тругла $= П$, основицу $= О$, а высину $= В$; слѣдуе

$$П = \frac{О \times В}{2} \text{ изъ овога слѣдуе}$$

$$П = \frac{О}{2} \times В = О \times \frac{В}{2}.$$

Ако и другога тругла површину назначимо $= п$, нѣгову основицу $о$, а высину $в$, имасе

$$П : п = \tfrac{1}{2}\, ОВ : \tfrac{1}{2}\, ов, \text{ или}$$
$$П : п = ОВ : ов;$$

ако є $О = о$, могусе членови другогъ отношенія чрезъ $О$ и $о$ дѣлити, т. є. предидућій членъ $ОВ$ чрезъ $О$, а послѣдуюћій $ов$, чрезъ $о$, быће

$П : п = В : в$; то есть: ако два тругла єднаке основице буду имала, она ће се међу собомъ имати као высине нъіове. Ако ли пакъ $В = в$, могусе у истой овой пређашньой соразмѣрности $П : п = ОВ : ов$ другога отношенія членови чрезъ $В$ и $в$ дѣлити, тако ћемо добыти

$П : п = О : о$; т. е. ако два тругла еднаке высине буду имала, она ће се међу собомъ имати као нюове основице.

3. Ако дакле два тругла имаю равне основице и равне высине, они ће быти у смотренію простора површногъ равни (§ 104.). Єръ е у таковомъ случаю $О = о$, и $В = в$, кадъ се у овой соразмѣрности $П : п = ОВ : ов$ друго отношеніе раздѣли чрезъ $О$ и $о$, пакъ чрезъ $В$ и $в$, слѣдуе $П : п = 1 : 1$; дакле $П = п$.

4. Одтудъ ако се два (или выше) тругла налазе међу двема равнотекућима надъ обштомъ основицомъ, они су међусобно равни. Єръ осимъ обште и равне основице имаю и равне высине.

5. Два тругла могу дакле у смотренію површногъ простора равни быти, безъ да бы међусобно подобни были.

196.

Наставленіе. *Површина квадрата правилногъ равна е производу основице и высине нѣгове, или равна е производу едне стране нѣгове, умножене са собомъ самомъ.*

Доказат. Будући да се параллелограмми међусобно тако имаю, као нюови производи изъ основице и высине (§ 195. ч. 2.), дакле ако у
ф. 93. фіг. 93. малый онай квадратъ $Е$ единица, съ коіомъ онай великій квадратъ $АБВГ$ измѣрити имамо, то найпре опредѣлити треба мѣру основице

ГВ и высине *ГА* мѣромъ дужине *аб*, производъ ће ове две мѣре дати просторну површину квадрата *АБВГ*; дакле

$$АБВГ : Е = ГВ \times ГА : гв \times га.$$

Ако є $гв \,.\, га = 1$, т. є. единицы мѣре дужине, то є нѣіовъ производъ опетъ единица, а *Е* единица мѣре површине, дакле мора быти

$$АБВГ : Е = ГВ \times ГА : 1,$$
или $$АБВГ = ГВ \times ГА \times Е.$$

Тако дакле садржава квадратъ правилный *АБВГ* у своіой површини $ГВ \times ГА$ пута единицу мѣре површине *Е*.

Ако є *Е* стопа квадратна, то є *аб* стопа у дужину. Дакле, *површина или просторъ површный квадрата наћи се може, кадъ се нѣгова основица и высина измѣри, и ове се мѣре међусобно умноже.*

197.

Слѣд. Будући да є свакій квадратъ равностраный четвороугалъ правилный, слѣдує: просторъ површный квадрата израчунатисе може, кадъ се мѣра едне стране собомъ самомъ умножи.

198.

Задатакъ. *Изъ задате површине параллелограмма, и едне къ нѣговомъ рачуну нуждне стране, другу страну изнаћи.*

Разрѣш. Да назначимо поврщину параллелограмма $= П$, основицу $= О$, а нѣгову высину $= В$, быће по § 194 $П = ОВ$. Ако ово уравненіе за $О$ и $В$ разрѣшимо, наћи ћемо

$$О = \frac{П}{В}, \text{ а } В = \frac{П}{О}.$$

199.

Задатакъ. *Изъ задате и познате поврщине квадрата, нѣгову страну изнаћи.*

Разрѣш. Ако є $Е$ позната поврщина, а x страна, коя се тражи, быће по § 196. $Е = x^2$ дакле $x = \sqrt{Е}$.

200.

Наставл. *Просторъ поврщный трапезія две равнотекуће стране имающеѣ, равнъ є производу изъ полусумме страна равнотекућій и ньіовогъ отстоянія међусобногъ.* Или фіг. 94. просторъ поврщный трапезія $АБДВ = (\frac{1}{2} АБ + \frac{1}{2} ВД) \times АЕ$.

ф. 94.

Доказат. Кадъ се двоуголна повуче $АД$, трапезій дѣлисе на $\triangle АДБ$, кога є высина $ДК$, на $АБ$ отвѣсна, и на $\triangle ВАД$, коєга є высина $АЕ$ на $ВД$ (продужену) отвѣсна, коя скупа изражава међусобно отстояніе равнотекућій страна, али просторъ поврщный $\triangle АДБ = \frac{1}{2} АБ \times ДК$ (или збогъ $ДК = АЕ$ по § 51.) $= \frac{1}{2} АБ \times АЕ$, а просторъ поврщный $\triangle ВАД = \frac{1}{2} ДВ \times АЕ$ (§ 195.);

дакле просторъ поврьный трапезія $АВДБ = \frac{1}{2} АБ \times АЕ + \frac{1}{2} ВД \times АЕ$, (общитегъ чинителя єданпутъ поставляюћи)

бyва $АВДБ = (\frac{1}{2} АБ + \frac{1}{2} ВД) \times АЕ$.

201.

Слѣд. Просторъ површный трапезія две стране равнотекуће неимаюћегъ, т. є. трапезоіда, изнаћисе може, кадъ се површина триуглова оны', на коя се онай двоуголномъ дѣли, поособъ изнађе, и после собере.

202.

Наставл. *Површина полигона правилногъ равна є производу изъ полуомѣрія и отвѣсне, изъ средоточія нѣсовогъ на ма кою страну нѣгову повучене.*

Доказат. Полигонъ правилный правима, изъ средоточія нѣгова на углове повученимъ, цепасе на триуглове равне подобне равнокраке, слѣдователно равно высоке, колико онъ страна има по § 145. ч. 3. фіг. 68., али површине свію овы' ф. 68. триуглова скупа равне су производу изъ полуомѣрія полигона и речене отвѣсне; єръ су равне производу изъ полусумме основица', кое са странама или омѣріемъ полигона судараюсе, и высине обште, коя є реченой отвѣсной равна; дакле површина полигона правилногъ равна є истоме производу.

203.

Слѣд. 1. Будући да є кругъ полигонъ правилный по § 183. ч. 1., у коме се отвѣсна, изъ средоточія на страну нѣгову спуштена, судара или слаже са полупречникомъ, *површина кругова равна є производу изъ полуокружія и полупречника нѣговогъ.* Дакле

2. Површина круга равна є такођеръ производу изъ цѣлогъ окружія и пола зрачца, или четврте части пречника.

3. За изнаћи моћи површину другогъ каквогъ полигона неправилногъ, нуждно є 1) полигонъ чрезъ двоуголне на триугле подѣлити: 2) овы триуглова површине, поособъ изнаћи: 3) ове површине све у сумму собрати.

204.

Задатакъ. *Изнаћи површину круга, кога намъ є пречникъ познатъ.*

Разрѣш. Да се изнађе окружіє, познатомъ пречнику соотвѣтствующій, у правой равноважной лініи посредствомъ отношенія међу пречникомъ и окружіємъ постоећегъ (§ 183.), половина оваковогъ исправлѣногъ окружія да се умножи са полупречникомъ, производъ одтудъ добывеный пожелана є површина круга (§ 203. ч. 1.).

Ако бы имали н. п. пречникъ $= 200'$, тражено окружіє да буде $= x$; быће

$100 : 314 = 200' : x$ (§ 183.),
или $1 : 314 = 2 : x$, (предид. дѣлећи чрезъ 100.)
одтудъ $x = 628'$, и одъ овога половина
$x = 314'$;
познатога пречника половина одъ $\frac{200'}{2} = 100'$,
слѣдователно изъ овога добивеный производъ
или тражена круга површина =
$314' \times 100 = 31400'$ □.

205.

Слѣд. 1. Ако бы се дакле површина или просторъ *абвд* фіг. 95. међу два круга, одъ кои' е еданъ у другомъ положенъ, наодећійсе изнаћи имао, површине оба круга поособъ опредѣлити треба, и маню одъ веће одузети. *ф.* 95.

2. Изъ опредѣлене и изнађене површине круга, може се и површина свакога кругоизсѣчника изнаћи, ако е познато число степеній, кое кругоизсѣчниковъ лукъ има. У таковомъ случаю цѣло окружіе круга или 360° имаюсе на задатый кругоизсѣчника лукъ или овога степене, као што се има изнађена површина круга на пожелану кругоизсѣчника површину, коя се изъ задата три члена лагко изнаћи може.

3. Одтудъ, кадъ се површина △ *АБМ* фіг. 96. коя быва одъ кругоизсѣчника *АМБВА* тетивке *АБ* и зрачаца *МА*, и *МБ*, одъ цѣле кругоизсѣчника површине одузме, добыћесе такођеръ површина кругоодсѣчника *АБВА*. *ф.* 96.

4. И зато и друга ма каква површине кругова часть *ДЕКГД* или *КГХК* равнымъ начиномъ изнаћи се може, кадъ се површина кругоизсѣчника манѣгъ *ДЕСД* по числу предидућемъ овога §. изнађе, и одъ површине кругоодсѣчника већегъ *ГКЕСДГ* одузме; тако исто кадъ се површина кругоодсѣчника *ГКЕСДГ* одъ површине *ГХКЕСДГ* одузме.

206.

Задатакъ. *У равань квадратъ преобраћи 1) свакій параллелограммъ: 2) триугаль: 3) кругъ.*

Разрѣш. 1) Изнаћи треба међу высиномъ и основицомъ датогъ параллелограмма средню геометрическу соразмѣрну; ова є страна пожеланогъ квадрата. 2) тако исто међу высиномъ и полуосновицомъ триугла да се изнађе средня соразмѣрна. 3) да се изнађе међу полупречникомъ и полуокружіемъ исправлѣнимъ (§ 183.) средня соразмѣрна, и надъ изнађеномъ средньомъ соразмѣрномъ да се подигне по § 136. квадратъ; површина овога равна ће быти површини преобратитисе имаюће фігуре.

Доказат. 1) Да назначимо да є высина $= в$, основица $= о$, међу ове две средня соразмѣрна $= м$; быће за параллелограммъ

$в : м = м : о$,

$во = м^2$, или $во$ є површина задатога параллелограмма, а $м^2$ є квадратъ, коега є страна средня соразмѣрна лінія меѣу высиномъ и основицомъ задатогъ параллелограмма: 2) за тругалъ быва

$$в : м = м : \tfrac{1}{2} о, \text{ одтудъ}$$
$$\tfrac{1}{2} ов = м^2;$$

али є $\frac{1}{2} ов$ површина триугла по § 195., а $м^2$ є површина квадрата, кога є $м$ средня соразмѣрна меѣу высиномъ и половиномъ основице задатога триугла:

3) Да назначимо зрачацъ $= р$, полуокружіє $= \frac{1}{2} п$, среднѣ соразмѣрну $= м$, быѣе за кругъ

$$р : м = м : \tfrac{1}{2} п,$$
$$\text{одкудъ } \tfrac{1}{2} рп = м^2,$$

или површина круга = квадрату, коєга є страна среднѣ соразмѣрна меѣу полупречникомъ и полуокружіємъ; дакле.

Примѣчаніє. Кадъ се меѣу полупречникомъ и полуокружіємъ среднѣ соразмѣрна тражи, мора се найпре полуокружіє у равноважной правой линіи опредѣлити. Али то є познато, да ово пречника къ окружію отношеніє (§ 183.), средствомъ кога се лінія права окружію равноважна изтражує, строгости математіческой не одговара, дакле неѣе ни квадратъ, у кои се површина круга преобраѣує, точно соотвѣтствовати (т. є. она славна квадратура круга), премда є ово тако мала погрешка, да се при обштемъ употребленію за уравнато узети може.

ГЛАВА ДЕСЕТА.

О МЕЂУСОБНЫМЪ ПОВРШИНА' ОТНОШЕНІЯМА.

207.

Наставл. *Површине троуглова имаюсе у отношенію сложеномъ высине и основице.*

Доказат. Да назначимо высине два троугла са B и $в$: основице са O и o : просторе површне $П$ и $п$; быће

$$П = \tfrac{1}{2} OB$$

$$\text{и } п = \tfrac{1}{2} ов \ \S\ 195.$$

$$\text{дакле } П : п = \tfrac{1}{2} OB : \tfrac{1}{2} ов,$$

$$\text{и одтудъ } П : п = OB : ов,$$

али $OB : ов$, то є отношеніе сложено изъ просты' высина B и $в$, и основица' O и o отношенія; дакле.

208.

Слѣдства. 1. Дакле и површине пораллелограмма имаюсе у отношенію сложеномъ высина и основица'. Єръ по задржаномъ предидућемъ наименованію, бyва

$$П = OB,$$

$$\text{а } п = ов,$$

$$\text{тако } П : п = OB : ов. \text{ Одтудъ}$$

2. Кадъ є у два параллелограмма $B = в$,

$$\text{быва } П : п = О : о,$$

$$\text{а кадъ є } О = о,$$

$$\text{быва } П : п = В : в;$$

$$\text{ако ли є пакъ } ОВ = ов,$$

$$\text{быва } П = п.$$

3. Ако су два параллелограмма у смотренію површина' равна, ньіове су высине са основицама обратно соразмѣрне, и напротивъ. У таковомъ є случаю

$$\text{одтудъ } ОВ = ов,$$

$$В : в = б : Б.$$

$$\text{Напротивъ, ако є } В : в = б : Б,$$

$$\text{быва } ОВ = ов.$$

Исто тако быва са триуглима.

209.

Наставл. *Површине триуглова подобны' имаюсе у отношенію удвоеномъ сваке стране соотвѣтствене.*

Доказат. Пошто се површине триуглова имаю у смотренію сложеномъ высина и основица § 207., кадъ се изъ триуглова *АБВ* и *абв* фіг. 97. ф. 97. подобны' вр'ова или равны' углова *А* и *а* на основице *БВ* и *бв* спусти отвѣсна *АД* и *ад*, быва

$$\triangle АБВ : \triangle абв = АД \times БВ : ад \times бв,$$

$$\text{али отношеніе } АД : ад = БВ : бв;$$

єръ у триуглима подобнима *АБВ* и *абв* быва

$$АБ : аб = БВ : бв \text{ по § 162.},$$

а у $\triangle$ *АДБ* и $\triangle$ *адб* подобнима, быва

$$АБ : аб = АД : ад,$$

дакле и $АД : ад = БВ : бв,$

слѣдователно кадъ се ово отношеніе $БВ : бв$ на мѣсто $АД : ад$ у првой соразмѣрности постави, быва

$$\triangle АБВ : \triangle абв = БВ \times БВ : бв \times бв = БВ^2 : бв^2, \text{ и т. д.}$$

210.

Слѣдства. 1. Површине параллелограмма подобны' такођеръ имаюсе у отношенію удвоеномъ сваке стране соотвѣтствение, или имаюсе као квадрати сваке стране соотвѣтственне. Єръ су триуглови подобни као половине параллелограмма подобны', али се цѣла имаю као половине; дакле. И

2. површине полигона подобны' имаюсе у отношенію удвоеномъ (или као квадрати) сваке стране соотвѣтственне. Кадъ се полигона подобна двоуголнима изъ равны' углова на супротие повученыма на триуглове подобне дѣле § 154.

ф. 75. быће у фіг. 75.

$$\triangle ЕАД : \triangle еад = ЕА^2 : еа^2,$$

$$\text{и } \triangle АДБ : \triangle адб = АБ^2 : аб^2,$$

$$\text{и } \triangle БДВ : \triangle бдв = БВ^2 : бв^2 \ (\S\ 208.)$$

$$\text{одтудъ } \triangle ЕАД + АДБ + БДВ : еад + адб + бдв = ЕА^2 + еа^2, \text{ или } = АБ^2 : аб^2 \text{ и т. д.}$$

3. Површине полигона правилны' подобны' имаюсе у отношенію удвоеномъ (или као квадра-

ти) полупречника или пречника кругова описаны'. Поєдине стране соотвѣтствене оваковы' полигона имаюсе као полупречници или пречници кругова описаны' § 182., али § 210. ч. 2; дакле.

4. Површине кругова, кои такођеръ къ полигонима правилнима, подобнима принадлеже, имаюсе као квадрати полупречника или пречника.

211.

Наставл. *Квадратъ ипотенузе равань є суммu квадратной оба катета.*

Доказат. Ако се надъ странама тріугла десноуголногъ $АБВ$ фіг. 98. подигну квадрати M, H, O, бы'ће квадратъ ипотенузе O раванъ оба катета квадратима $M + H$, или $БВ^2 = АБ^2 + АВ^2$. Єръ у $\triangle\ АБВ$ десноуголномъ по спуштеной отвѣсной $АГ$, бы'ће $\triangle\ АБВ \sim АБГ$ по § 124., дакле бы'ће $БВ : АБ = АБ : БГ$ по § 162. ф. 98.

и одтудъ $БВ \times БГ = АБ^2$.

Равнимъ начиномъ $\triangle\ АБВ \sim \triangle\ АГВ$;

дакле быва $БВ : АВ = АВ : ГВ$,

и одтудъ $БВ \times ГВ = АВ^2$.

Тако ћемо добыти ова два уравненія

$$БВ \times БГ = АБ^2$$
$$\text{и } БВ \times ГВ = АВ^2$$

собраніємъ $БВ \times БГ + БВ \times ГВ = АБ^2 + АВ^2$.

или $БВ \times (БГ + ГВ) = АБ^2 + АВ^2$; (общтегъ чинит.)

али кадъ є $БГ + ГВ = БВ$, на мѣсто равны' поставляюћи, быва $БВ \times БВ = БВ^2$;

дакле $БВ^2 = АБ^2 + АВ^2$.

212.

Слѣд. Квадратъ свакога катета равань е квадрату ипотенузе по одузетомъ другога катета квадрату.

213.

Наставл. *Ако се надъ странама триугла* ф. 99. *десноугoлногъ АБВ* фіг. 99. *подигну фігуре подобне, быће фігура ипотенузе О равна фігурама оба катета М + П.*

Доказат. Ерь се $О : М + П = БВ^2 : АБ^2 + АВ^2$ (по § 210. ч. 2.), али $БВ^2 = АБ^2 + АВ^2$ по § 210.;

дакле $О = М + П$.

214.

Наставл. *Ако се надъ странама триугла* ф. 100′. *десноугoлногъ АБВ* фіг. 100′. *назначе полукружіи, быће мѣсечики О и Н Инократови равни истоме триуглу десноугoлномъ.*

Доказат. Ерь полукругъ надъ ипотенузомъ назначенъ $я + \triangle АБВ + ю = о + я + н + ю$ полукруговима оба катета (§ 213.); дакле и $я + ю$ изъ оба члена уравненія одузимаюћи

$$\triangle АБВ = О + Н.$$

ОДДѢЛЕНІЄ ДРУГО.

ТРИГОНОМЕТРІЯ ПОВРШНА.

215.

Изяснен. Тругалъ свакій, као што се на овомъ мѣсту сматра, изъ шестъ частій состоисе, т. е. изъ три стране, и толико углова, одъ кои кадъ се изъ три задаты частій, остале три траже, тругалъ *разрѣшити* зовесе, и часть Землѣмѣрія ова разрѣшенія учећа, зовесе *Тригонометрія* (Тругломѣріє), и она є *површна* или *шарна* (§ 2.). Мы ће мо дакле површну овде изложити.

216.

Слѣд. Оне три задате тругла части, изъ кои се остале три тражити имаю, союзъ некій и отношеніе са овыма трима имати мораю.

217.

Настав. *Стране тругла нису соразмѣрне угловима супротнимъ.*

Доказат. Кадъ бы стране тругла угловима супротнима сразмѣрне быле, стране бы морале у ономъ истомъ отношенію са угловима супротнима растити, но ако стране труглова онда кадъ углови увеличаваюсе и расту, алъ нерасту у равномъ отношенію са угловима супротнимъ. Ерь кадъ бы стране у равномъ отношенію са угловима супротнимъ растле, морале бы се оне, кадъ се угалъ удвои, такођеръ удвоити, и обратно кадъ се страна удвои, морао бы се и угалъ супротный удвоити, али кадъ се страна удвои, угалъ супротный неудвоявасе. Ерь да предпо-
ф.100. ставимо, да є у $\triangle$ *АБВ* фіг. 100., кои да се опише окружіємъ, страна *ВА* $=$ полупречнику, слѣдователно $=$ страни шестоугла правилногъ, лукъ *АВ* има ће 60" § 148. ч. 2., и зато угалъ *АБВ*, коега є мѣра половина лука *АВ* (§ 89.) имаће 30 степеній; ако се дакле увелича страна *АВ* $=$ полупречнику іошъ єданпутъ т. є. да буде $=$ *ВД* пречнику, промениће се угалъ *АБВ* у угаль *ДБВ*, али угалъ овай *ДБВ* као десанъ (по § 81. ч. 2.), и тако $= 90''$, страни є *ДВ* удвоеной супротанъ, па ніє удвоенъ, но утроенъ угла *АБВ* 30"; дакле кадъ се страна удвои, угалъ супротный не увеличавасе удвоено; дакле стране тругла не расту са угловима равнымъ отношеніємъ; дакле.

218.

Слѣд. Да бы дакле изъ углова стране тругла, и обратно изъ страна углове средствомъ соразмѣрности изнаћи могли, нуждно є онакова количества или праве лініє угловима поставити, коє у рачуну углове представляю, и коє ће странама углова супротнимъ соразмѣрне быти.

219.

Изяснен. Оне праве лініє, коє углове у рачуну представляю, и коє су угловима супротнимъ соразмѣрне, зато, што углове замѣнявају, зовусе *лініє тригонометрическе* или *дѣйства углови* (functiones). Овакове су лініє I. *Нѣдрište* (sinus), II. *Сонѣдриште* (cosinus), III. *Дирка* (tangens), IV. *Судирка* (cotangens), V. *Сѣчица* (secans), VI. *Сусѣчица* (cosecans).

I. НѢДРИШТЕ.

220.

Изясн. *Нѣдриште*, или *нѣдриште право* (sinus rectus) угла *ДВА* фіг. 101. или лука *ДА*, ф. 101.
угалъ *ДВА* мѣрећегъ, зове се она лінія отвѣсна *ДЕ* изъ ма кое крайнѣ лука *АД* точке *Д* (или *А*) на полупречникъ спуштена. Оно стране или полупречника *АВ* одсѣчіє *ЕА*, коє се међу нѣдриштемъ и лукомъ налази, зовесе *нѣдриште обратно* истога лука или угла.

221.

Слѣд. Лукъ дакле *АД* ма каквымъ већимъ или маньимъ полупречникомъ може быти назначенъ.

222.

Наставл. *Нѣдриште є половина тетивке удвоеногъ лука.*

ф. 101. Да буде лукъ *АД* фіг. 101. мѣра угла *АВД*, быће Нѣдр. $ДЕ = \frac{1}{2} ДК$.

Доказат. Тетивка *ДК* полупречникомъ *ВА* двопресецасе (§ 65.), дакле є $ДЕ = ЕК$, али $ДЕ =$ половини одъ *ДК*; дакле.

223.

Задатци: 1. *Изнаћи нѣдриште* 30°.

Разрѣш. По § 222. Нѣдр. $ДЕ = \frac{1}{2} ДК$, али *ДК* овде равно є страни шестоугла правилногъ или полупречнику § 148. ч. 2.; дакле $\frac{1}{2} ДК = \frac{1}{2}$ зрачцу. Постављаюћи зрачацъ $= 1$, быће Нѣдр. $30^\circ = \frac{1}{2}$.

2. *Изнаћи Нѣдриште* 45°.

Разрѣш. По § 222. Нѣдр. $ДЕ = \frac{1}{2} ДК$, али є садъ *ДК* ипотенуза у $\triangle ДВК$, али по § 211. $ДК^2 = ДВ^2 + ВК^2$;

извлачећи коренъ $ДК = \sqrt{ДВ^2 + ВК^2}$; али на мѣсто $ДВ^2 + ВК^2$ єръ су зрачци, постављаюћи единицу, быва $ДК = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; дакле *ДК* половина или Нѣдр. $45^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2}$.

3. *Изнаћи Нѣдрипте* 18°.

Разрѣш. По § 222. Нѣдр. $ДЕ = \frac{1}{2} ДК$; али садъ є $ДК =$ страни десетоугла правилногъ, а ова є $=$ већемъ одсѣчю полупречника среднымъ и крайнымъ отношеніемъ сѣченогъ, а полупречникъ среднымъ и крайнымъ отношеніемъ овако се сѣче: Предпоставляюћи да є већа частъ зрачца $= x$,

быва $1 : x = x : 1 - x$; одтудъ

$x^2 = 1 - x$, у редъ поставляюћи

$x^2 + x = 1$, попуняваюћи другимъ членомъ

$x^2 + x + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$, извлаченѣмъ корена

$x + \frac{1}{2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}}$, скраћиваюћи

$x + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}}$, изъ именит. 4 извлачећи $\sqrt{}$

$x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$, премештаюћи

$x = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} = ДК$;

али Нѣд. $18° = \frac{1}{2}\, ДК$; дакле Нѣд. $18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{(6 - 2\sqrt{5})}$.

II. Сонѣдриште.

224.

Изяснен. *Сонѣдриште* (cosinus) зовесе она частъ зрачца, коя се налази међу угла нѣдриштемъ *ДЕ* фіг. 101., и нѣговымъ ошиљѣмъ *В*. Или фіг. 102. будући да є *ДК* = *ЕС*, то є *ЕС* Сонѣдриште лука *АД*. Будући да є Сонѣдриште *ЕС* категъ у △ *ЕСД*, може се по § 211. изнаћи:

ф. 101.
ф. 102.

$ДС^2 = ЕС^2 + ЕД^2$, премештаюћи $ЕД^2$

$ДС^2 - ЕД^2 = ЕС^2$, извлаченѣмъ $\sqrt{\ }$

$ЕС = \sqrt{ДС^2 - ЕД^2}$, поставляюћи вредность

Сонѣд. угл. $x = \sqrt{1^2 - \text{Син. } x^2}$.

225.

Задатци. 1. *Изнаћи Сонѣдрište 30°.*

По § 224. Сонѣд. $30° = \sqrt{1^2 - (\frac{1}{2})^2}$,

подизаюћи на квадратъ Сонѣдр. $30° = \sqrt{1 - \frac{1}{4}}$,

единицу приводећи у разб. Сонд. $30° = \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{1}{4}}$,

отятіємъ Сонд. $30° = \sqrt{\frac{3}{4}}$,

изъ именителя 4. извлачећи $\sqrt{\ }$ Сонд. $30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

2. *Изнаћи Сонѣдрište 45°.*

По § 224. Сонѣдрište $45° = \sqrt{1^2 - (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2}$,

подизаюћи на квадратъ, Сонд. $45° = \sqrt{1 - \frac{1}{4}\, 2}$,

умноженіе свршиваюћи, Сонд. $45° = \sqrt{1 - \frac{2}{4}}$,

единицу у разбієніє преобраћиваюћи Сонд. $45°$
$= \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{2}{4}}$,

отятіємъ Сонд. $45° = \sqrt{\frac{2}{4}}$,

изъ именителя извлачећи $\sqrt{\ }$ Сонд. $45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

3. *Изнаћи Сонѣдрište 18°.*

По § 224. Сонѣдрište

$$18° = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{4}\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}\right)^2};$$

подизаюћи на квадр. Совђд.

$$18° = \sqrt{1 - 16(6 - 2\sqrt{5})},$$

именителя 16. подписиваюћи, Сонд.

$$18° = \sqrt{1 - \frac{(6 - 2\sqrt{5}}{16}},$$

единицу у разбіеніе преобраћив. Сонд.

$$18° = \sqrt{\frac{16}{16} - \frac{(6 - 2\sqrt{5})}{16}}$$

знаке промениюћи, быва Сонд.

$$18° = \sqrt{\frac{16 - 6 + 2\sqrt{5}}{16}},$$

или свршиваюћи, быва Сонд.

$$18° = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}},$$

изъ именителя извлачећи $\sqrt{}$ Сонд.

$$18° = \tfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

III. ДИРКА.

226.

Изяснен. *Дирка* (tangens) зовсе она отвѣсна лінія изъ ма кое лука крайнѣ точке подигнута, и до другога полупречника продужена, и у обштой точки удараня окончаваюћасе. Тако е н. п. угла *АВД* ф. 101. или нѣговогъ лука *АД*, ф. 101. дирка *АН*.

Дирка изнаћисе може или

α) по настави. § 211. $НВ^2 = АН^2 + АВ^2$, пренашаюћи AB^2 быва Дирк. $HB^2 - AB = AH^2$

извлачећи $\sqrt{\ }$ быва Дир. $\sqrt{HB^2 - AB^2} = AH$

постављајући вреди. $\sqrt{\text{сѣч. } x^2 - 1^2} =$ Дирк. угл x.

или β) по подобности триуглова, т. е. $\triangle\ HAB \sim \triangle\ ДEB$.

$$EB : AB = ДE : HA, \text{ одтудъ } AH = \frac{AB \cdot ДE}{EB}$$

постављајући вредность Дирк. уг. $x = \frac{\text{Нѣдр. } x}{\text{Сонд. } x}$.

227.

Задатци. 1. *Изнаћи Дирку* 30°.

По § 226. β) Дирк. $30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$,

числит. и именит. съ 2. умножавајући Дирк. $30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

" " " съ $\sqrt{3}$ " Дирк. $30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

или Дирка $30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

2. *Дирку* 45° *изнаћи*.

По § 226. β) Дирка $45^\circ = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1$.

3. *Изнаћи Дирку* 18°.

По § 226. β) Дирка $45^\circ = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}{\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$;

Числит. и именит. умнож. са 4. $= \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$,

„ „ „ „ са $\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}$,

„ „ „ „ са $\sqrt{5-\sqrt{5}}$

$$= \frac{\sqrt{20-8\sqrt{5}}}{\sqrt{20}}$$

„ „ „ дѣлећи чрезъ $\sqrt{4} = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$

„ „ „ множећи са $\sqrt{5} = \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$

или Дирка $45° = \frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$.

228.

Изяснев. Оштрій уголъ, кои или другоме додатъ, или одъ другога одузетъ, проузрокуе, да другій изиђе десанъ, овде се зове *допуна* (complementum) или *уголъ допуне* (angulus complementi), и то у првомъ случаю зовесе *допуна по оскудости* (complementum per defectum), а у другомъ *допуна по иступу* (complementum per excessum) т. е. у смотренію оногъ другогъ угла, коій или оскудѣва до десногъ, или десанъ уголъ превозилази. Тако уголъ *ДСХ* фіг. 102., у смотренію угла *АСД* као до десногъ допунитисе имаюћегъ, зовесе допуна по оскудости; ерь углу *АСД* до деснога *АСХ* оскудѣва уголъ (кои га ф. 102.

допунити има) $ДСХ$. Тако є исто угалъ $ДСХ$ у смотренію тубогъ угла $БСД$ допуна по изступу; єръ угалъ $БСД$ превазилази десанъ количествомъ угла $ДСХ$. — Нѣдрище угла допуне $ДСХ$, кое є $ДК$ у смотренію допунитисе имаюћегъ угла $АСД$, зовесе *сонѣдрище*; дирка $ЛХ$ зовесе *судирка*; сѣчица $НС$ *сусѣчица*; а нѣдрище обратно $ХК$ *сонѣдрище обратно*.

IV. СУДИРКА.

229.

Изясн. *Судирка* є дирка угла допуне (§ 228.). Изнаћи се може изъ подобности триуглова, т. є.

ф. 102. *α)* $\triangle ЛХС \sim \triangle ЕДС$ фіг. 102.

$$ДЕ : ЕС = ХС : ЛХ,$$

поставляюћи Тригонометр. вредности

$$\text{Нѣд. уг. } x : \text{Сонѣд. } x = 1 : \text{Суд. } x;$$

$$\text{и Судирка угл. } x = \frac{\text{Сонѣд. } x}{\text{Нѣд. } x}. \text{ Или}$$

β) Слѣдствомъ § 211. $ЛС^2 = ЛХ^2 + ХС^2$, премештаюћи $ЛХ^2$ бива, $ЛС^2 - ЛХ^2 = ХС^2$, извлачећи $\sqrt{}$ $\sqrt{ЛС^2 - ЛХ^2} = ХС$, поставляюћи тригон. вредности. $\sqrt{\text{Сонд. } x^2 - 1^2} = \text{Суд. } x$. Или

γ) изъ подоб. триуглова овы' $\triangle ЛХС \sim \triangle НАС$;

$$АН : ХС = АС : ЛХ,$$

поставл. вред. тригон. Дирк. $x : 1 = 1 :$ Суд. x,

$$\text{одтудъ Суд. угл. } x = \frac{1^2}{\text{Дир.} x}.$$

230.

Задатци. 1. *Изнаћи Судирку* 30°.

По § 229. *a)* Судирка $30^{\circ} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}$;

числит. и именит. множећи са 2 быва $= \sqrt{3}$.

2. *Изнаћи Судирку* 45°.

По § 229. *a)* Судирка $45^{\circ} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1$.

3. *Изнаћи Судирку* 18°.

По § 229. *a)* Судирка $18^{\circ} = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\frac{1}{4}\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$;

Числ. и именит. са 4 множ. и

" " " чрезъ $\sqrt{2}$ дѣлећи $= \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{3-\sqrt{5}}}$,

" " " са суммомъ $= \frac{\sqrt{20+8\sqrt{5}}}{\sqrt{4}}$

или $= \frac{\sqrt{20+8\sqrt{5}}}{2}$,

разправляюћи на чинит. быва $= \frac{\sqrt{4 \,.\, 5 + 2 \,.\, 4\sqrt{5}}}{2}$

$= \frac{2\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$.

и чрезъ 2 дѣлећи $= \sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

V. Сѣчица.

231.

Изяснен. *Сѣчица* є полупречникъ, кои продуженъ са диркомъ ударасе и у обштой ударапя
ф. 102. точки окончавасе. Тако є лука *АД* фіг. 102. сѣчица *НС*. — Изнаћисе може или

α) по § 211. т. е. $НС^2 = АС^2 + АН^2$;
$$НС = \sqrt{АС^2 + АН^2},$$
постављаюћи тригоном. вредности Сѣчица уг. $x = \sqrt{\text{Дир. } x^2 + 1^2}$. Или

β) изъ подобн. триуглова, т. є. $\triangle НАС \sim \triangle ДЕС$,
$$ЕС : СД = АС : СН,$$
постав. триг. вред. Соńѣд. $x : 1 = 1 :$ Сѣч. x, одтудъ
$$\text{Сѣчица угл. } x = \frac{1^2}{\text{Соńѣд. } x}$$

232.

Задатци. 1. *Изнаћи Сѣчицу угл.* 30°.

По пред. § *β*) Сѣчица $30° = \frac{1^2}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$,

Числ. и имен. множ. са $2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$,

„ „ „ „ са $\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

2. *Изнаћи Сѣчицу* 45°.

По § 231. β) Сѣчица $45^\circ = \dfrac{1^2}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$;

Числ. и именит. множ. са $2 = \dfrac{2}{\sqrt{2}}$,

$$= \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

3. *Изнаћи Сѣчицу* 18°.

По § 231. β) Сѣчица угла $18^\circ = \dfrac{1^2}{\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$;

Числитељ и имен. множећ.

са 4, быва $= \dfrac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

са разликомъ $= \dfrac{4\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{80}}$,

чрезъ $\sqrt{2}$ дѣлећи $= \dfrac{4\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{40}}$,

са $\sqrt{40} = \dfrac{4\sqrt{200-40\sqrt{5}}}{40}$,

чрезъ 4 дѣлећи $= \dfrac{\sqrt{200-40\sqrt{5}}}{10}$

разправляюћи на чинителѣ $= \dfrac{\sqrt{4.50-4.10\sqrt{5}}}{10}$,

$$= \frac{2\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10},$$

числ. и имен. чрезъ 2 дѣлеħи $= \frac{\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}{5}$.

$= \frac{1}{5} \sqrt{50 - 10\sqrt{5}}$.

VI. Сусѣчница.

233.

Изяснен. *Сусѣчица* е угла допуне, сѣчица § 228. изнаħисе може α) по § 211 $ЛС^2 = ХС^2 + ХЛ^2$;

$$ЛС = \sqrt{ХС^2 + ХЛ^2}.$$

постављаюħи тригон. вредности Сонѣд. угл. x $= \sqrt{\text{Суд. } x^2 + 1^2}$; или

β) Изъ подоб. триуглова овы' $ЛХС \sim НЛС$;

$$ЛН : НС = ХЛ : ЛС.$$

постављаюħи тригонометрическу вредность быва;

Дирк. X : Сѣч. $X = 1$: Сус.

X: одтудъ Сусѣчица $X = \frac{\text{Сѣч. } X}{\text{Дирк. } X}$. или

γ) Изъ подоб. триуглова овы' $ЛХС \sim ДЕС$.

$$ДЕ : ДС = ХС : ЛС.$$

постав. триг. вред. Нѣд. $X : 1 = 1$: Сусѣч. X.

одтудъ Сусѣчица $X = \frac{1^2}{\text{Нѣд. } x}$.

234.

Задатци. 1. *Изнаħи Сусѣчицу* 30°.

По предид. § γ) $= \frac{1^2}{\frac{1}{2}} = 2$.

2. *Изнаћи Сусѣчицу 45°.*

По предид. § $\gamma) = \sqrt{2}$.

3. *Изнаћи Сусѣчицу 18°.*

По предид. § γ. Сусѣчица $18^\circ = \dfrac{1^2}{\frac{1}{4}\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$;

$$= \frac{4}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}},$$

множећи са суммомъ $= \dfrac{4\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{16}}$,

$$= \frac{4\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4},$$

и $= \sqrt{6+2\sqrt{5}}$.

235.

Наставл. *Колико годъ е већій уголъ оштрій или лукъ одъ 1 до 90 степеній, толимъ су већа нѣгова дѣйства: а штогодъ већій буде уголъ тупый или лукъ одъ 90° до 180°, толимъ су мани нѣгови дѣйства.*

Доказат. *БФ* фіг. 103. нѣдруште е угла *АМП*, или лука *БП*, а тако е *СГ* нѣдрииште оштрогъ угла манѣгъ *СМН*, али е *БФ* веће одъ *СГ* и то количествомъ *Бо*, ерь, ако се преко *С* повуче равнотекућа *СІ* на *ПМ*, у параллелограмму *СоФГ* быће *СГ* = *оФ* (§ 51.); тако исто дирка *ПЛ* > *ПК* (као оне часть), и сѣчица *МЛ* > *МК* (ерь ф. 103.

е МЛ страна найдужа у $\triangle$ *МЛК* као супротна углу *ЛКМ* тубомъ збогъ нѣговогъ доугла *МКН* оштрогъ, у $\triangle$ *КМН* десноуголномъ положеногъ § 56. 118.); и тако е дакле прва часть ясна. Да бы и другу часть овога наставленія доказали, узимамо два угла туба *ЕМБ* и *ЕМС*, и за израженіе нњіовы дѣйствія, изъ двею крайнњ' точкій лукова *ЕАБ*, и *ЕАБС* изабрали смо точку *Е*. Кадъ се изъ лука *БАЕ*, мѣре угла тубогъ *ЕМБ*, крайнѣ точке *Е* спусти лінія отвѣсна *ЕП* на страну *БМ* (кои на противну страну продужитисе мора до *Ж*), бы'ће *ЕП* истога лука *ЕАБ*, или угла *ЕМБ* нѣдриште; ако се изъ *Е* подигне отвѣсна *ЕЖ*, бы'ће *ЕЖ* дирка, а *МЖ* сѣчица; а тако исто веђега угла тубогъ *ЕМС* или нѣговогъ лука *ЕАБС*, нѣдриште е *Ен*, дирка е *ЕР*, а сѣчица *МР*, али е *Ен* $<$ *ЕП*, *ЕР* $<$ *ЕЖ*, а *МР* $<$ *МЖ* (збогъ угла *МРЕ* оштрогъ у $\triangle$ *МЕР* кодъ *Е* десноуголногъ нѣковъ е доугалъ *МРЖ* тубый, дакле у $\triangle$ *МРЖ* страна е *МЖ* $>$ *МР*); дакле.

236.

Слѣд. Нѣдриште право *АМ* угла десногъ *АМН* равно е полупречнику, и одъ свію нѣдришта правы' е найвеђе. Еръ лінія отвѣсна, изъ лука *АБСН* крайнѣ точке *А* на страну *МН* спуштена, слажесе са полупречникомъ *АМ*, и тако нѣму равна; но и веђа е количествомъ *АХ*, одъ найближегъ нѣдришта *БФ*, слѣдователно веђе одъ свію остали', кое се види, кадъ се на *НМ* преко *Б* (и преко *С*) повуче ⋕ *БХ*. Тако исто нѣдрище обратно *МН* угла десногъ равно є полупречнику, а дирка и сѣчица, као равнотекуће, нигди се не састаю, ма безконечно да се продуже, и одтудъ се као безконечне сматраю.

237.

Наставл. *Упоредни угли имаю равна тригонометрическа дѣйства.*

Доказат. Да узмемо два упоредна угла *БМН* и *БМЕ*. Нѣдрище угла *БМН* быће *БФ*, *НЛ* є дирка, а *МЛ* сѣчица, али ако се изъ лука *БЛЕ* крайнѣ точке *Б* (обоимъ луковима обиите) спусти на страну *ЕМ* (продужену) отвѣсна *БФ*, быће *БФ* и угла *БМЕ* нѣдрище, као што є очевидно, слѣдователно упоредны' углова нѣдришта су равна. Ако ли се пакъ изъ истога лука *БЛЕ* друге крайнѣ точке *Е* на страну супротну *БМ* до *Ж* продужену, спусти отвѣсна *ЕП*, а друга изъ точке *Е* отвѣсна *ЕЖ* на *ЕМ*, быће *ЕП* нѣдришта, *ЕЖ* дирка, *МЖ* сѣчица угла *БМЕ*, али *ЕП* = *БФ*, *ЕЖ* = *НЛ*, а *МЖ* = *МЛ*. Єръ $\triangle$ *ЕПМ* $\cong$ $\triangle$ *БФМ* збогъ равны' углова очельны' при *М*, при *П* и *Ф* десны', и збогъ стране *МЕ* = *МБ*; и $\triangle$ *ЕЖМ* $\cong$ $\triangle$ *НЛМ* такођеръ збогъ равны' углова очелны' *М*, збогъ *Е* и *Н* десны', и збогъ стране *МЕ* = *МН*; дакле соотвѣтствение овы' триуглова, слѣдовательно и изложена упоредны' углова дѣйства међусобно равна су.

238.

Слѣдства. 1. Два лука кои одъ 90° равноотстое, едапъ по изступу, а другій по оскудости, имаю она иста нѣдришта.

2. Лукъ, кои 180° превозилази, има оно исто нѣдрище, кое има лукъ онай, коимъ оне 180° превазилази.

3. Лукови, кои одъ 180° равноотстое, имаю нѣдришта равна.

4. Лукъ, кои одъ 360° оскудѣва, има оно исто нѣдрище, кое има лукъ онай, коимъ одъ 360° оскудѣва.

ф. 103. 5. Кадъ лукъ *НБ* фіг. 103 расте, увеличавасе нѣдрище (§ 235). Лука 90° нѣдрище равно є полупречнику или *АМ*. Кадъ лукъ преко 90° расте, нѣдрище опада; нѣдрище лука $180° = O$. У трећемъ четврту растећимъ луковима, расте и нѣдрище, докъ опетъ лукъ 270° равапъ буде полупречнику. Напоследку у четвртомъ четврту растећимъ луковима, нѣдришта опадаю, докъ опетъ лука 360° нѣдрище равно буде *O*. Будући да нѣдришта у трећемъ и четвртомъ четврту подъ пречникъ *ЕД* падаю, слѣдователно на противну страну, зато, ако нѣдришта у првомъ и другомъ четврту узмемо положителна, быће у трећемъ и четвртомъ отрицателна. н. п. лукъ 30° и 210° имаю едно нѣдрище $= \frac{1}{2}$, али Нѣдр. $30° = + \frac{1}{2}$, а Нѣдр. $210° = - \frac{1}{2}$.

6. Кадъ лукъ расте, совѣдриште опада: Совѣдриште $90^{\circ} = O$; Совѣдр. $180^{\circ} = 1$; Совѣдр. $270^{\circ} = o$; Совѣдр. $360 = 1$. Совѣдришта су у првомъ и четвртомъ четврту положителна, а у другомъ и трећемъ отрицателна. Одтудъ лукови, кои одъ 90° ровно оскудѣваю, єданъ по оскудости, а другій по изступу имаю она иста т. є. равна совѣдришта по величини, но разна по знацыма. Одтудъ и лукъ, кои одъ 180° оскудѣва, има оно исто совѣдриште, кое има лукъ, коимъ одъ 180° оскудѣва, и то како по величини, тако и по знаку, то есть отрицателно. Дакле Совѣд. $90^{\circ} = O$; Совѣдр. $180^{\circ} = -1$; Сонд. $270^{\circ} = O$; Сон. $360^{\circ} = +1$.

7. Дирка и судирка., сѣчица и сусѣчица у првомъ и трећемъ су четврту положителне, а у другомъ и четвртомъ отрицателне. Дирка и Сѣчица $90^{\circ} = \infty$; Дирка и Сѣчица $180^{\circ} = O$; Дирка и Сѣч. $270^{\circ} = \infty$; Дирка, и Сѣч. $360^{\circ} = O$. А кодъ Судирке и Сусѣчице обратно є.

239.

Наставл. *Лініе Тригонометріческе лукова подобны имаюсе као полукретници* фіг. 104. *ф.* 104.

Доказт. Лукъ $AX \sim$ луку и $\alpha\eta$ дакле и

$\triangle IEC \sim \triangle \delta\epsilon C$, слѣдователно

$C\text{Д} : C\delta = \text{ДЕ}\ \delta\epsilon$,

$= K : \epsilon C$;

и $\triangle$ *ГАС* $\sim$ $\triangle$ *γαС*, слѣдователно быва

СД : *Сδ* = *АГ* : *αγ*

= *ГС* : *γС*;

и $\triangle$ *ЛХС* $\sim$ $\triangle$ *ληС*, слѣдователно быва

СД : *Сδ* = *ЛХ* : *λη*

= *ЛС* : *λС*; дакле.

240.

Слѣдства. 1. Ако се оба полупречника *Сα* и *СА* на оно исто число частій подѣли (кое у већемъ полупречнику слѣдователно само ће веће быти, а у мањмъ, манѣ величиномъ, али числомъ равне), свака ће линія Тригонометрическа къ луку *αδ* принадлежећа толико имати частій одъ свогъ полупречника *δС*, колико линія равноимена къ луку *АД* принадлежећа одъ свога полупречника *ДС*.

2. Отношеніе сваке лініе Тригономерическе къ полупречнику зависи само одъ величине угла *АСД* (§ 27.), совршена пакъ величина біова зависи одъ величине полупречника. Ако се дакле полупречникъ, быо онъ великій или малый, на исто число частій подѣли, свака ће лінія Тригонометрическа извѣсно неко оваково число частій имати, кое число само одъ угла зависи, и кое свагда и при продуженомъ полупречнику оно исто остае, н. п. ако се свакій полупреникъ или великій или малый числомъ 100 назвчи, быће угла 30° Пѣдрните = 50.

241.

ПРАКТІЧЕСКО ОСНОВОПОЛОЖЕНІЕ.

Ако се полупречнику извѣстно число частій припише, изнаћи, колико таковы частій свакой одъ горе изложены лінія тригонометрически за свакій лукъ принадаю.

Ово се опредѣлити може помоћію Маѳематіке вышше, и наша ће дужность быти опредѣлеве и сочинѣне већъ одъ наметны мужева таблице, научити употреблявати. Оваковѣ таблице съ великимъ трудомъ сочинѣне издали су на светъ неки наметни мужеви, као Неперъ; Бриггъ; Іоахімъ Рети, Францъ Карлъ Шулцъ, и Георгій Вега. У овима таблицама полупречникъ = 10.000,000.000 частій, а нѣговъ Логаритамъ = 10 быти мора. У простимъ изданіяма последнѣ су три цыфре изоставлѣне, и тако є зрачацъ = 10,000.000. а логаритми непремѣнни оставлѣни су, као што є при концу овога дѣла такова таблица приключена.

242.

Слѣд: У таблицы овой приключеной изнаћи можемо свакога угла 1 до 90° падлежно число овы частій, одъ кои се 10.000.000 полупречнику приписую, колико одъ овы свакой лініи Тригонометрической привадлеже. Одъ 1 до 90°

зато, што после 90° степени она се дѣйства поврађаю (§ 237.). У овой таблицы у првомъ разреду налазесе степени и минута углова: у другой истимъ угловима припадаюћа нѣдришта: у трећой дирке: у четвртой логаритми диркій: у петой логаритми нѣдришта. Логаритми сѣчица изоставлѣни су (што се безъ нъи пословати може). Таблица є ова тако уређена, да на првой т. є. левой страни наодесе углови оштри са нъіовима дѣйствіама, и овыма припадаюћи логаритми, а на десной страни налазесе углова допуне т. є. тубогъ угла степени, са нъновыма дѣйствіама, и овима припадаюћи логаритми. Какогодъ што на левой страни углови одъ *0* до 90° редомъ расту, тако на десной страни одъ 90° — 45° опадаю тако, да се међусобно до десногъ угла допуняваю.

243.

Задатакъ. *Пожелано дѣйство задатогъ угла у таблицы изнаћи.*

Разрѣшеніе. 1. Ако задатъ угалъ десанъ не превозилази, треба тражити задатъ угалъ (т. є. нѣгове степене у првомъ разреду леве или десне стране, као што већій или маньій буде одъ 45°, соотвѣтствоваће нѣму у соседномъ другомъ разреду нѣдриште: у трећой дирка: у четвртой и петой слѣдую логаритми дѣйствія: са стране пакъ противне у истой лініи соотвѣтствує у првомъ разреду допуна истога угла, после нѣдриште, дирка и логаритми.

2. Ако є задатъ угалъ одъ десногa већій или тубый, тай одузети валя одъ 180°, да бы нѣговъ доугалъ добыти могли, кои ако по предидућемъ начину у таблицы потражимо, наћи ћемо задатога угла дѣйствія. (§ 237.). Ако се тражи н. п. Нѣдр. угл. 125° : одузимаюћи 125° одъ 180°, и остатку 55°, или 54° 60′ да се изтражи принадлежеће Нѣдриште = 8191521, кое заєдно и задатомъ углу 125° припада (§ 237.).

3. Будући дасе у нашой овде при концу овога дѣла приключеной таблицы само свакій десетый минутъ изложенъ налази, па да бы и она изоставлѣны минута дѣйствія изнаћи могли, слѣдуюћимъ начиномъ поступати треба: изнаћи треба у таблицы найближій већій и найближій маньій угалъ (одъ задатога), одузети треба како найближій маньій одъ найближегъ већегъ угла, тако и нѣдриште найближегъ манѣгъ угла одъ нѣдришта найближегъ већегъ угла и да се назначе ове две разлике; после да се одузме найближій маньій угалъ табличный и одъ задатогъ угла, и да се сочини соразмѣрность ова: Као што се има прва разлика на другу, тако се има трећа на ону разлику, коіомъ нѣдриште датогъ угла превазилази нѣдриште найближегъ угла табличногъ. И кадъ се четврта изнађена разлика дода къ нѣдришту угла найближегъ манѣгъ табличногъ, добыћесе пожелано нѣдриште.

II. пр. Нѣдрищте угла $60^{\circ}\ 24'$ изнаћи, кои се у нашой таблицы неналази. Зато 1) одузети треба найближій табличный угаль $60^{\circ}\ 20'$ одъ найближегъ већегъ табличногъ угла $60^{\circ}\ 30'$; быће прва разлика = 10. 2) одузети треба и найближегъ маньгъ угла нѣдрищте = 86891.96 одъ найближегъ већегъ угла нѣдрищта = 87035.57. быће друга разлика = 14361. 3) Одузети треба найближій маньій угаль табличный $60^{\circ}\ 20'$ и одъ задатогъ угла $60^{\circ}\ 24'$, добыћесе разлика трећа. Одтудъ 4) да се сочини соразмѣрность

$$10 : 14371 = 4 : x$$
$$x = 5744\tfrac{4}{16}.$$

кадъ ову изнађену четврту разлику = 5744 (пренебрегаваюћи разбіеніе) къ угла найближегъ маньгъ нѣдришту = 86891. 96 додамо. т. є

$$\begin{array}{r} 86891.96 \\ +\quad 5744 \\ \hline \end{array}$$
добыћемо 8694940 = Нѣд. $60^{\circ}\ 24'$.

244.

Слѣд. Равнымъ начиномъ, као § пред. ч. 3. и логаритамъ надлежный нѣдришту или дирки изнаћисе може.

245.

Задатакъ. *Задатомъ дѣйствію надлежный угаль у таблици наћи.*

Разрѣшеніе. 1. Задато дѣйство изнаћи треба у таблицы у надлежномъ разреду, одговараће му у првомъ разреду пожеланый угалъ, као и остала дѣйства у истой правой лініи у своима разредима.

2. Ако се небы задато дѣйство са свима своима цыфрама у таблицы налазило, быо бы знакъ да угалъ осимъ степеный іоштъ и мінутій има. Да бы дакле и у овомъ случаю угалъ изнаћи могли, сочинити треба соразмѣрность као у § 243.

Н. п. Да се изнађе соотвѣтственный угалъ задатомъ нѣдришту 62615.03, кои се у таблицы нашой неналази. Зато изнаћи треба

нѣдр. найближе веће таблично = 62705.71
нѣдр. „ манѣ „ = 62478.85

кадъ се одузме = 22686 остат.;

равнымъ начиномъ одузети угалъ 38° 40′ найближомъ манѣмъ табличномъ дѣйству соотвѣтственный, одъ угла 38° 50′, найближемъ већемъ дѣйству или нѣдришту соотвѣтствуюћи, и остатакъ = 10′ да се забележи. Да се одузме далѣ

одъ задатогъ нѣдришта . . = 62615.03
найближ. манѣ таблично нѣдриште = 62478.85

= 136.18,

быће соразмѣность, 22686 : 10 = 13618 : x

одтудъ x = 6′ (разбіеніе превебрегаваюћи) кадъ се изнађены 6′ къ найближемъ манѣмъ углу 38° 40 додаду, добыћесе пожеланый угалъ = 38° 46.

3. Равнымъ начиномъ можесе изъ задатогъ логаритма, кои се у таблицы дѣйства са свима цыфрама точно небы налазіо, надлежно, дѣйство, и угалъ изнаћи.

О ТРИУГЛИМА ДЕСНОУГОЛНЫМЪ

246.

Задат. *Изъ задате ипотенузе и єдноеъ* ф. 105. *катета углове изнаћи.* Или фіг. 105. изъ задате ипотенузе *ВД* и катета *ДЕ* углове изнаћи.

Разрѣш. Будући да є триугалъ десноуголанъ тога свойства, да кадъ се узме єданъ катетъ за полупречникъ, другій катетъ быва дирка, а ипотенуза сѣчица, а кадъ се узме ипотенуза за полупречникъ, єданъ катетъ быва нѣдрините, а другій сонѣдрините као што є очевидно изъ фігуре. Зато по § 239.

$$ВД : p^{*}) = \text{Нѣд. } ДЕ : \text{Нѣд. } ДВЕ.$$

Одтудъ $$ДВЕ = \frac{ДЕ}{ВД}.$$

А угалъ $ЕДВ = 90° - ДВЕ.$

РАЗРѢШЕНІЕ ТРИУГЛА РАВНОКРАКОГЪ.

247.

Задатакъ. *У триуглу равнокракомъ изъ задатыі изнаћи непознате части.*

---

*) Подъ ‚p‘ разумеваћемо свагда полупречникъ.

Разрѣшеніе. Кадъ се у $\triangle$ *ЛМН* равнокра- *ф.* 106.
комъ фіг. 106. изъ вр'а нѣговогъ *М* на основицу *ЛН* спусти отвѣсна *МР*, бы'ће по § 222.

$$ЛР = \tfrac{1}{2}\,ЛН = \tfrac{1}{2}\,С;$$

дакле по § 246. *ЛМ* : *ЛР* = 1 : Нѣд. *ЛМР*,

или $б : \tfrac{1}{2}\,С = 1 :$ Нѣд. $\tfrac{1}{2}\,и$; одтудъ

$$\text{I. Нѣд. } \tfrac{1}{2}\,и = \frac{\tfrac{1}{2}\,С}{б} = \frac{С}{2б}.$$

$$\text{II. } б = \frac{\tfrac{1}{2}\,С}{\text{Нѣд. } \tfrac{1}{2}\,и} = \frac{С}{2\ \text{Нѣд. } \tfrac{1}{2}\,и}.$$

$$\text{III. } \tfrac{1}{2}\,С = \frac{б\ \text{Нѣд. } \tfrac{1}{2}\,и}{1}.$$

$$\text{IV. } С = 2б.\ \text{Нѣд. } \tfrac{1}{2}\,и.$$

ГЛАВНА РАЗРѢШЕНІЯ ТРИУГЛОВА.

248.

Наставл. *У свакомъ триуглу стране су у ономъ отношенію, у комъ су нѣдришта угло-ва истимъ странама супротна.* Или у $\triangle$ *АБВ* фіг. 107. стране имаюсе као нѣдришта углова *ф.* 107.
супротны'.

Доказат. $БВ : \tfrac{1}{2}\,БВ = АВ : \tfrac{1}{2}\,АВ$. Али $\tfrac{1}{2}\,БВ =$ Нѣд. уг. *А* (по § 222.), али $\tfrac{1}{2}\,АВ =$ Нѣд. уг. *Б*, дакле равна на мѣсто равны' у горньой соразмѣрности поставляюћи, бива *БВ* : Нѣд. *А* = *АВ* : Нѣд. *Б*.

249.

Слѣдство. Овымъ се начиномъ може свакій тригалъ разрѣшити; противуставляюћи странама нѣдрипта, а нѣдриштама стране, коій се начинъ у тригонометріи зове *разрѣшеніе по противупоставляню.*

250.

Задат. *Изъ задаты' страна АБ и БВ и изъ задатоѣъ угла єдной одъ задаты' страна супрот-*
ф. 108. *ногъ А, изнаћи угалъ В,* фіг. 108.

Разрѣш. По § 248. *БВ* : Нѣд. *А* = *АБ* : Нѣд. *В.* Но ако є страна *БВ* маня одъ стране *АБ,* народићесе сумня, оће ли изнађеный угалъ *В* быти оштаръ као *АВБ,* или тубый као *АвБ;* еръ су како у △ *АБВ* тако и у △ *АБв* она иста условія, т. є. *АБ* страна обшта, а угалъ *А* обштій, далѣ страна *БВ* = страни *Бв.* Но у оваковомъ случаю съ друге стране познато быти мора, оће ли угалъ пожеланый *В* оштаръ или тубый быти.

251.

ф. 109. **Слѣд.** Ако ли є пакъ страна *АБ* фіг. 109. задатомъ углу прилежећа маня одъ стране *БВ* задатомъ углу *А* супротне, свака сумня изчезава; еръ подъ овымъ предпоставлянѣмъ △ *БвА* нема иста условія она, коя △ *АБВ* има.

252.

Задатакъ. *Изъ задате сумме С, разлике Р два количества непозната x и ю, и сама количества изнаћи.*

Разрѣш. Да назначимо Сумму $= C$, разлику $= P$, ова два непозната количества x и $ю$, т. е. веће количество $= x$, а манѣ $= ю$.

$$\text{дакле } C = x + ю,$$
$$\text{а } P = x - ю$$
$$\text{одтудъ } C + P = 2x\text{; и } x = \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}P.$$

Садъ намъ остае изнаћи количество манѣ или $ю$;

$$C = x + ю;$$

$$\text{превашанѣмъ } C - x = ю$$

поставляюћи одъ x вредность $C - \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}P = ю$, назначено отатіе свршив. $\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}P = ю$.

Ово се речма овако изговорити дае; *ако се къ полусумми дода полуразлика, добыћесе количество веће; а ако се одъ полусумме одузме полуразлика, добыћесе количество манѣ.*

253.

Наставлен. *Ако се у триуглу некомъ на страну найдужу спусти отвѣсна изъ угла супротногъ, има ће се найдужа страна къ сумми прочій двею страна, као што се има естій оны страна разлика, къ разлики одсѣчія найдуже стране.* Или фіг. 110.

$$БВ : АБ + АВ = АБ - АВ : ХБ.$$ ф. 110.

Доказат. Ако се изъ ошиля угла *А* спусти на найдужу страну *БВ* отвѣсна *АХ*, и изъ *А* као средоточія найманьомъ страномъ △ *АВВ*, *АВ* као полупречникомъ напише окружіе круга, а друга се страна продужи до *Ф*, быће *БВ* : *БФ* = *БМ* : *БН* (§ 171.), али ова соразмѣрность садржава у себи предидућу доказатисе имаюћу; еръ *БВ* є страна найдужа : *БФ* є сумма двею страна *АБ* + *АВ* збогъ *АВ* = *АФ*; *БМ* є ньіова разлика, еръ є ньіова разлика *АБ* — *АВ*, али є *АВ* = *АФ*; дакле є разлика *АБ* — *АФ* = *БМ*; *БН* є разлика одсѣчія найдуже стране, еръ є разлика *БХ* — *ХВ*, али *ХВ* = *ХН*; дакле є иста разлика и *БХ* — *ХН* = *БН*; дакле.

Примѣчаніе. По овомъ наставленію разрѣшаваюсе триугли, у коима су све три стране познате а ни єданъ угаль, по соразмѣрности изнаћесе *БН*, и кадъ се ово одузме одъ стране *БВ*, изнаћесе *ВН*, а кадъ се ово чрезъ 2 раздѣли, добыесе *ВХ*, кое ће кадъ се за полупречникъ узме *АВ*, быти Сонѣдрште угла *В*, тако се изнађе угаль *В*, па онда и остали.

254.

Наставл. *У свакомъ триуглу имасе сумма даты и познаты двею страна къ ньіовой разлики, каогодъ што се има дирка полусумме углова, истима странама супротны, къ дирки полуразлике углова ньіовы.* Или фіг. 111. у △ *АБВ*,
ф. 111.

$$АБ + АВ : АБ = \text{Дир. угл.}\,\frac{Б + В}{2} : \text{Дир. угл.}\,\frac{Б - В}{2}.$$

Доказат. Изъ A страномъ маньомъ AB да се напише окружіє круга, а страна $БA$ да се продужи до K, изъ K преко B да се повуче неопредѣлена KE, да се повуче далѣ изъ $Д$ до B тетивка $ДB$, на кою да се повуче $\#$ $БE$; быћe како угалъ $ДBK$ тако и $БEK$ (§ 81. ч. 2.) десанъ, слѣдователно $\triangle\ ДBK$ и $\triangle\ БEK$ десноугли. Ово кадъ быва збогъ $ДB \# БE$ у $\triangle\ KБE$ соразмѣрность

$$БK : БД = EK : EB \text{ (§ 157.), али}$$

1. $БK$ є сумма даты' и познаты' двею страна $AБ + AB$, збогъ $AB = AK$;

2. $БД$ є исты' страна разлика; еръ збогъ $AB = AД$ разлика є $AБ - AB = AБ - AД = БД$.

3. EK є дирка полусумме углова $Б + B$ (у датомъ $\triangle\ AБB$) задатыма двема странама супротны'; еръ угалъ KAB као сполашнѣй у смотренію $\triangle\ AБB$ раванъ є сумми углова супротны' $Б + B$ (§ 121.), али угалъ $KДB = \frac{1}{2}\, KAB$ (§ 81. ч. 1.), дакле угалъ $KДB = \dfrac{A + Б}{2}$, али угалъ $KДB$ $=$ углу $KБE$, дакле и угалъ $KБE =$ полусумми углова $Б + B$ у датомъ $\triangle\ AБB$, али (кадъ се у $\triangle\ KБE$ катетъ $БE$ узме за полупречникъ) EK є дирка угла $KБE$; дакле EK є дирка углова $\dfrac{A + Б}{2}$, датимъ двема странама супротны'.

4. EB є дирка полуразлике исты' углова $Б$ и B; еръ кадъ се у датомъ $\triangle\ AБB$ угалъ манѣй $Б$ или $KБB$ одузме одъ $KБE$, коій има полусумму углова $Б$ и B (по доказателству), добыћесе угалъ $BБE$

(као што е очевидно); дакле е уголъ *ВБЕ* полуразлика углова *Б* и *В*, али (узимаюћи катетъ *БЕ* за полупречникъ) бы'hе *ЕВ* дирка угла *ВБЕ;* дакле е *ЕВ* дирка полуразлике углова *Б* + *В;* слѣдователно.

Примѣчаніе. По овомъ наставленію могу се триугли разрѣшити у ономъ случаю, кадъ намъ буду две стране са обуваћенымъ угломъ познате, тако се могу и остали углови изнаћи. Єръ кадъ се наће дирка полуразлике углова, изнаћесе и уголъ полуразлике у таблицы, коій кадъ се наће и къ углу познатомъ полусумме дода (§ 252.), добыесе уголъ већій *А*, а одтудъ и трећій *В*, и т. д.

УПОТРЕБЛЕНІЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКО - ЛОГАРИТМИЧЕСКЕ ТАБЛИЦЕ.

255.

Задатакъ. *Триуголъ десноуголанъ АБВ, у комъ е н. п. страна АБ, и уголъ В* (а уголъ *Б* као десанъ познатъ е, и трећій *А* одма ће се
ф. 112. изнаћи) *задатъ, разрѣшити.* фіг. 112.

Разрѣш. Начинъ разрѣшенія увидитисе може у § 246, но да бы ученицы и употребленіе тригонометрическо - логаритмическе таблице познали, наводимо овде примѣръ съ конечнымъ рѣшеніемъ. По задатку тражисе страна *БВ*, коя ће се изъ слѣдуюће соразмѣрности изнаћи; Нѣд. *В* : *АБ* = Нѣд. *А* : *БВ* по § 248; ако е страна

$AБ = 124^0$ (хватій), а угалъ $В = 50^0\ 40'$; быће $А = 39^0\ 20'$ (по § 115. ч. 4), и предидућа соразмѣрность прелази у ову

$$\text{Нѣд. } 50^0\ 40' : 124^0 = \text{Нѣд. } 39^0\ 20' : БВ.$$

Садъ, кадъ изъ таблице угловима принадлежећа нѣдришта изтражимо, и у предидућу соразмѣрность на ньіово мѣсто поставимо, быва

$$7734716 : 124^0 = 6338309 : БВ.$$

Одтудъ се обичнымъ начиномъ *БВ* као четвртый членъ изъ соразмѣрности изнаћи може, но за избећи при многомъ множеню и дѣленю погрешке, употреблююсе логаритми. Ако се дакле надлежни логаритми изъ таблица ньіовы' (за нѣдришта у таблицы дѣйствія при концу свога дѣла приключеной по § 243, а за стране у таблицы логаритма' числама наравныма надлежеће, као што су у Алгебри приключени) изнађу и у наведеной соразмѣрности на надлежна ій мѣста поставимо, она ће се дакле у ову обратити

$$9,8884444 : 2,0934217 = 9,8019735 : БВ;$$

одкудъ сумма споляшньы' членова = сумми средньы' членова, быва

$$БВ + 9,8884444 = (2,0934217 + 9,8019735)$$
$$= 11,8953952.$$

$$\text{и тако } БВ = 11,8953952 - 9,8019735$$
$$= 2,0069508 \text{ (Алгебра § 191.)}.$$

И кадъ се садъ овай последньій логаритамъ, страни *БВ* соотвѣтствуюћій, изъ таблице логаритама изнађе, изнађесе и сама страна *БВ*, т. є мѣра нѣна дужине. По будући да се овай логаритамъ међу табличнима логаритмама са свима своима крайньима цифрама не налази, но налазе-се одъ нѣга вейій и манѣй, кое е знакъ, да ова иста страна *БВ* осимъ цѣлы' хватова има іошть и частій хвата. Дабы дакле іошть и оне части изнаћи могли, кое е разбіеніе, наблюдавати треба начинъ прописани у Алгебри § 181, кое кадъ учинимо, изнаћићемо разбіеніе десетно = 0,614 (остале цифре, кое части тисуће превозилазе, изоставляюћи), кое къ числу, манѣмъ логаритму табличномъ соотвѣтствуюћемъ = 101, додаваюћи, быће дужина стране $БВ = 101{,}614^{\circ}$.

Или ако бы управъ знати хотели іошть и ово десетно разбіеніе 614 хвата, колико чине стопа, може се по § 62 у Алгебри изложеномъ начину изнаћи.

256.

Задатакъ. *Површину тругла тригонометрически изнаћи.* Или просторъ површный △

ф. 113. *АБЕ* фіг. 113. изнаћи.

Разрѣшен. По § 194. 195. површина △ $АБЕ = \frac{1}{2}\,cx$ (то есть спуштаюћи изъ вр'а △ *Е* на основицу отвѣсну *ЕК*, и назначаваюћи ню са x, а основицу *АБ* са c), дакле како c, тако и x тригонометрически израчунати треба, и изнађене вредности на ньіово мѣсто поставити.

1. Али c (по § 247.) $= 2a$. Нѣд. $\frac{1}{2}\,u$.

2. У △ десноугол1номъ *АЕК* изнаћисе може

x или кадъ се узме AE за полупречникъ изъ соразмѣрности назначавајући полупречникъ са p

$$p : AE = \text{Сонд. } \tfrac{1}{2}\, u : \text{Сонд. } EK,$$

или $p : a = \text{Сон. } \frac{1}{2}\, u : x$,

одтудъ $x = a. \ \text{Сон. } \frac{1}{2}\, u$;

или се x изнаћи може изъ $\triangle\, AEK$, узимајући AK за полупречникъ, быће EK дирка угла A или Судирка $\frac{1}{2}\, u$ (§ 246), и обстаће слѣдујућа соразмѣрность;

$$p : AK = \text{Суд. } \tfrac{1}{2}\, u : \text{Судр. } EK,$$

или $p : \frac{1}{2}\, c = \text{Суд. } \frac{1}{2}\, u : \text{Суд. } x$;

одтудъ $x = \frac{1}{2}\, c. \ \text{Суд. } \frac{1}{2}\, u$.

Но мы ћемо првый образацъ задржати; дакле на мѣсто $\frac{1}{2}\, xc$ постављајући изнађене вредности назначавајући површину триугла са T, быће

Површина триугла $T = \frac{1}{2}\, a. \ \text{Сон. } \frac{1}{2}\, u. \ 2a$ Нѣд. $\frac{1}{2}\, u$. Коій образацъ збогъ обширности свое овако се скратити може

у $\triangle\, AEБ$ има се $c : a = \text{Нѣд. } u : \text{Совд. } \frac{1}{2} u$,

а у $\triangle\, AEK$ има се $a : \frac{1}{2}\, c = 1 : \text{Нѣд. } \frac{1}{2}\, u$

Ове две соразм. умножав. $ac : \frac{1}{2}\, ac = \text{Нѣд. } u : \text{Нѣд. } \frac{1}{2}\, u. \ \text{Сонд. } \frac{1}{2}\, u$,

првый и другій членъ дѣлећ. $1 : \frac{1}{2} = \text{Нѣд. } u : \text{Нѣд. } \frac{1}{2}\, u. \ \text{Сонд. } \frac{1}{2}\, u$

производъ сполнш. и унут. чл. $\text{Нѣд. } \frac{1}{2}\, u. \ \text{Сонд. } \frac{1}{2} u = \frac{1}{2}\, \text{Нѣд. } u$,

одтудъ тражећи Нѣд. u; $\text{Нѣд. } u = 2\ \text{Нѣд. } \frac{1}{2}\, u. \ \text{Совд. } \frac{1}{2}\, u$.

Садъ у првомъ триугла образцу $\frac{1}{2}\, a. \ \text{Сонд. } \frac{1}{2} u . 2a$

Нѣд. $\frac{1}{2}$ *u*, обштегъ чинителя узимаюћи, быва

$$T = \frac{1}{2} a^2 (2 \text{ Нѣд. } \frac{1}{2} u. \text{ Сон. } \frac{1}{2} u),$$

на мѣсто 2 Нѣд. $\frac{1}{2}$ *u*. Сон. $\frac{1}{2}$ *u* поставляюћи Нѣдр. *u*

быће $T = \frac{1}{2} a^2. \text{ Нѣд. } u.$

УПОТРЕБЛЕНІЕ АЛГЕБРЕ ПРИ ТРАЖЕНЮ ГЛАВНЫ' ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИ' НАСТАВЛЕНІЯ.

257.

1. *Изъ задатогъ лука АД = у, нѣговогъ Нѣдришта и Сонѣдришта, и изъ задатогъ лука АБ = α, нѣговогъ Нѣдришта и Сонѣдришта; изнаћи Нѣдриште и Сонѣдриште разлике* ДГ и ГС

ф. 114. фіг. 114.

Разрѣш. 1. Тругли *СБЕ, СІК, ДІГ* подобни су (§ 239.), одтудъ

$$СБ : ДІ = СЕ : ДГ.$$

У овой соразмѣрности осимъ четвртога члена и другій е *ДІ* непознатъ, кой се овако наћи може:

$$ДІ = ДК - ІК,$$

а *ІК* овако се пронаћи може;

$$СЕ : СК = ЕБ : ІК$$

$$ІК = \frac{ЕБ \cdot СК}{СЕ},$$

а кадъ се изнађе *ІК* изнаћи е лако *ДІ*.

Кадъ се на мѣсто овы' израженія тригонометрическе лініе поставе, быва

$$ДІ = ДК - ІК$$

т. е. $= \text{Нѣд.}\ \gamma - \dfrac{\text{Нѣд.}\ \alpha\ .\ \text{Сон.}\ \gamma}{\text{Сон.}\ \alpha}$;

а $ДГ = \dfrac{ЕС\ .\ ДI}{БС} = \dfrac{\text{Сон.}\ \alpha}{1}\ (\text{Нѣд.}\ \gamma - \dfrac{\text{Нѣд.}\ \alpha\ .\ \text{Сон.}\ \gamma}{\text{Сон.}\ \alpha}$;

назнач. множ. сврш. $\text{Нѣд.}\ (\gamma - \alpha) = \text{Нѣд.}\ \gamma\ \text{Сон.}\ \alpha - \text{Сон.}\ \gamma.\ \text{Нѣд.}\ \alpha.$

Разрѣш. 2. $\text{Сон.}\ (\gamma - \alpha) = ГС = ГI + IС$; дакле свакій членъ изтражтваюћи и собраніе сврщиваюћи добыћемо пожелано. Да тражимо $IС$ изъ

$$СЕ : СК = СБ : IС,$$

одтудъ $IС = \dfrac{СК}{СЕ} = \dfrac{\text{Сон.}\ \gamma}{\text{Сон.}\ \alpha}$.

А IГ изнаћисе може изъ сразмѣрности ове

$$СБ : ДI = БЕ : IГ;$$

$$IГ = \frac{БЕ\ .\ ДI}{СБ};$$

поставляюћи вредность $IГ = \dfrac{\text{Нѣд.}\ \alpha}{1}$

$$(\text{Нѣд.}\ \gamma - \frac{\text{Нѣд.}\ \alpha\ .\ \text{Сон.}\ \gamma}{\text{Сон.}\ \alpha}),$$

умноженіе сврщиваюћи $IГ = \text{Нѣд.}\ \alpha\ .\ \text{Нѣд.}\ \gamma - \dfrac{\text{Нѣд.}\ \alpha^2\ .\ \text{Сон.}\ \gamma}{\text{Сон.}\ \alpha}$;

дакле $IС + IГ = \dfrac{\text{Сон.}\ \gamma}{\text{Сон.}\ \alpha} + \text{Нѣд.}\ \gamma\ .\ \text{Нѣд.}\ \alpha - \dfrac{\text{Нѣд.}\ \alpha^2\ .\ \text{Сон.}\ \gamma}{\text{Сон.}\ \alpha}$;

ова два разбієнія разправляюћи на чинителѣ;

$$= \frac{\text{Сон. } \gamma}{\text{Сон. } \alpha} . (1 - \text{Нѣд. } \alpha^2) + \text{Нѣд. } \gamma . \text{Нѣд. } \alpha,$$

на мѣсто $(1 - \text{Нѣд. } \alpha^2)$ поставляюћ. Сон. α^2

$$= \frac{\text{Сон. } \gamma}{\text{Сон. } \alpha} . \text{Сон. } \alpha^2 4 \text{ Нѣд. } \gamma . \text{Нѣд. } \alpha,$$

множеніе соверш. $= \text{Сон. } \gamma . \text{Сон. } \alpha + \text{Нѣд. } \gamma . \text{Нѣд. } \alpha.$

дакле $\text{Сон. } (\gamma - \alpha) = \text{Сон. } \gamma . \text{Сон. } \alpha + \text{Нѣд. } \gamma . \text{Нѣд. } \alpha.$

258.

Слѣд. Ако су лукови α, γ, маньи одъ четвртака, принадлежаће већемъ луку веће нѣдрище, манѣмъ манѣ; са свимъ противно е кодъ Сонѣдришта ньіовы'. Одтудъ другій производъ у образцу нѣдришта очевидно маньій е одъ првога. Слѣдователно лагко се увидити може, треба ли производъ одъ другога одузети.

259.

II. *Изъ задатогъ лука АЂ = α, нѣговогъ Нѣдришта и Сонѣдришта; изъ задатогъ лука БД = γ, нѣговогъ Нѣдр. и Сонд. изнаћи Нѣд. ДК и Сон. КС, сумме оба два лука $(\alpha + \beta)$.*

Разрѣш. 1. Нѣдрище сумме *ДК*, кое се тражи, саставлясе изъ частій *ДI* и *IК*, кое пособъ изнаћи и собрати валя. И тако

$$СЕ : ДГ = СБ : ДI,$$

$$ДI = \frac{СБ . ДГ}{СЕ} = \frac{\text{Нѣд} . \beta}{\text{Сон. } \alpha};$$

а да бы IK изнаћи могли, морамо изъ $\triangle IKC$ будући да су намъ све стране непознате CI изтражити,

$$\text{а} \quad CI = CГ - IГ,$$

али $IГ$ овако се налази $EC : ДГ = EБ : IГ$

$$IГ = \frac{EБ . ДГ}{EC} = \frac{\text{Нѣд. } \alpha . \text{Нѣд. } \beta}{\text{Сон. } \alpha};$$

$$\text{дакле } CI = \text{Сон. } \beta - \frac{\text{Нѣд. } \alpha . \text{Нѣд. } \beta}{\text{Сон. } \alpha}.$$

По познатой страни CI, да тражимо изъ $\triangle CIK$ страну IK, коя се къ $ДI$ додати има, овымъ начиномъ;

$$CБ : CI = БE : IK,$$

$$IK = \frac{БE . CI}{CБ} = \text{Нѣд. } \alpha \left(\text{Сон. } \beta - \frac{\text{Нѣд. } \alpha . \text{Нѣд. } \beta}{\text{Сон. } \alpha}\right)$$

$$= \text{Нѣд. } \alpha . \text{Сон. } \beta - \frac{\text{Нѣд. } \alpha^2 . \text{Нѣд. } \beta}{\text{Сон. } \alpha}.$$

$$\text{и } ДI + IK = \text{Нѣд. } \alpha \text{ Сон. } \beta - \frac{\text{Нѣд. } \alpha^2 . \text{Нѣд. } \beta}{\text{Сон. } \alpha} + \frac{\text{Нѣд. } \beta}{\text{Сон. } \alpha}$$

Ова два разбіенія разправляюћи на чинителѣ, быва:

$$= \frac{\text{Нѣд. } \beta}{\text{Сон. } \alpha} (1 - \text{Нѣд. } \alpha^2),$$

$$= \text{Нѣд. } \alpha . \text{Сон. } \beta + \frac{\text{Нѣд. } \beta}{\text{Сон. } \alpha} (\text{Сон. } \alpha^2); \text{ дакле}$$

$$\text{Нѣд. } (\alpha + \beta) = \text{Нѣд. } \alpha . \text{Сон. } \beta + \text{Сон. } \alpha . \text{Нѣд. } \beta.$$

Разрѣш. 2. Сонѣдрините сумме $(\alpha + \beta)$ овако се тражи:

$$СБ : CI = CE : CK.$$

$$CK = \frac{CE \, . \, CI}{CБ} = \text{Сон.}\ \alpha \left(\text{Сон.}\ \beta - \frac{\text{Нѣд.}\ \alpha \, . \, \text{Сон.}\ \beta}{\text{Сон.}\ \alpha}\right),$$

дакле Сон. $(\alpha + \beta)$ = Сон. α . Сон. β — Сон. α. Нѣд. β.

260.

III. *Изнаћи дирку разлике два лука или Дир.* $(\gamma - \alpha)$.

$$\text{Дир.}\ (\gamma - \alpha) = \frac{\text{Нѣд.}\ (\gamma - \alpha)}{\text{Сон.}\ (\gamma - \alpha)};$$

$$= \frac{\text{Нѣд.}\ \gamma \, . \, \text{Сон.}\ \alpha - \text{Сон.}\ \gamma \, . \, \text{Нѣд.}\ \alpha}{\text{Сон.}\ \gamma \, . \, \text{Сон.}\ \alpha + \text{Нѣд.}\ \gamma \, . \, \text{Нѣд.}\ \alpha},$$

Кадъ се садъ и числитель и именитель чрезъ Сон. γ . Сон. α дѣли:

$$= \frac{\frac{\text{Нѣд.}\ \gamma \, . \, \text{Сон.}\ \alpha}{\text{Сон.}\ \gamma \, . \, \text{Сон.}\ \alpha} - \frac{\text{Сон.}\ \gamma \, . \, \text{Нѣд.}\ \alpha}{\text{Сон.}\ \gamma \, . \, \text{Сон.}\ \alpha}}{\frac{\text{Сон.}\ \gamma \, . \, \text{Сон.}\ \alpha}{\text{Сон.}\ \gamma \, . \, \text{Сон.}\ \alpha} + \frac{\text{Нѣд.}\ \gamma \, . \, \text{Нѣд.}\ \alpha}{\text{Сон.}\ \gamma \, . \, \text{Сон.}\ \alpha}};$$

одтудъ $\text{Дир.}\ (\gamma - \alpha) = \dfrac{\text{Дир.}\ \gamma - \text{Дир}\ \alpha}{1 + \text{Дир.}\ \gamma \, . \, \text{Дир}\ \alpha}$.

261.

IV. *Изнаћи Дирку сумме два лука, или Дир.* $(\alpha + \beta)$.

$$\text{Дир.}\ (\alpha + \beta) = \frac{\text{Нѣд.}\ (\alpha + \beta)}{\text{Сон.}\ (\alpha + \beta)};$$

$$= \frac{\text{Нѣд.}\ \alpha\ .\ \text{Сон.}\ \beta + \text{Сон.}\ \alpha\ .\ \text{Нѣд.}\ \beta}{\text{Сон.}\ \alpha\ .\ \text{Сон.}\ \beta - \text{Нѣд.}\ \alpha\ .\ \text{Нѣд.}\ \beta},$$

са Сон. α . Сон. β и

числ. и именит. дѣлећи быва
$$= \frac{\dfrac{\text{Нѣд.}\ \alpha\ .\ \text{Сон.}\ \beta}{\text{Сон.}\ \alpha\ .\ \text{Сон.}\ \beta} + \dfrac{\text{Сон.}\ \alpha\ .\ \text{Нѣд.}\ \beta}{\text{Сон.}\ \alpha\ .\ \text{Сон.}\ \beta}}{\dfrac{\text{Сон.}\ \alpha\ .\ \text{Сон.}\ \beta}{\text{Сон.}\ \alpha\ .\ \text{Сон.}\ \beta} - \dfrac{\text{Нѣд.}\ \alpha\ .\ \text{Нѣд.}\ \beta}{\text{Сон.}\ \alpha\ .\ \text{Сон.}\ \beta}}$$

$$= \frac{\text{Дир.}\ \alpha + \text{Дир.}\ \beta}{1 - \text{Дир.}\ \alpha\ .\ \text{Дир.}\ \beta}.$$

262.

V. *Изъ Нѣдришта и Сонѣдришта единственногъ угла, Нѣдриште и Сонѣдриште угла удвоеногъ изнаћи.*

Разрѣш. 1. Да назначимо единственный угалъ са φ, а удвоеный са 2φ, быће

$$\text{Нѣд.}\ 2\varphi = \text{Нѣд.}\ (\varphi + \varphi);$$
$$= \text{Нѣд.}\ \varphi\ .\ \text{Сон.}\ \varphi + \text{Сон.}\ \varphi\ .\ \text{Нѣд.}\ \varphi,$$

собраніе свршив. $= 2\ \text{Нѣд.}\ \varphi\ .\ \text{Сон.}\ \varphi.$

Разрѣш. 2. $\text{Сон.}\ 2\varphi = \text{Сон.}\ (\varphi + \varphi);$
$$= \text{Сон.}\ \varphi\ .\ \text{Сон.}\ \varphi - \text{Нѣд.}\ \varphi\ .\ \text{Нѣд.}\ \varphi,$$
$$= \text{Сон.}\ \varphi^2 - \text{Нѣд.}\ \varphi^2.$$

У овомъ израженію поставляюћи на мѣсто Сон. φ^2 равноважно 1^2 — Нѣд. φ^2, быва

$$\text{Сон.}\ 2\varphi = 1 - 2\ \text{Нѣд.}\ \varphi^2.$$

И у овомъ израженію на мѣсто Нѣд. φ^2 поставляюћи 1 — Сон. φ^2 быва

$$\text{Сон.}\ 2\varphi = 2\text{Сон.}\ \varphi^2 - 1.$$

И тако ово су образци:

1) $\text{Нѣд. } 2\varphi = 2\text{Нѣд. } \varphi \cdot \text{Сон. } \varphi.$

2) $\text{Сон. } 2\varphi = \text{Сон. } \varphi^2 - \text{Нѣд. } \varphi^2.$

3) $\text{Сон. } 2\varphi = 1 - 2\,\text{Нѣд. } \varphi^2.$

4) $\text{Сон. } 2\varphi = 2\,\text{Сон. } \varphi^2 - 1.$

263.

VI. *Изнаћи Дирку удвоеногъ угла.*

$$\text{Дирка } 2\varphi = \text{Дир. } (\varphi + \varphi);$$

али Дир. $(\varphi + \varphi)$ (по § 261. IV.) $=$

$$= \frac{\text{Дир. } \varphi + \text{Дир. } \varphi}{1 - \text{Дир. } \varphi \cdot \text{Дир. } \varphi} = \frac{2\,\text{Дир. } \varphi}{1 - \text{Дир. } \varphi^2}$$

264.

VII. *Изъ Сонѣдришта удвоеногъ лука, изнаћи Нѣдриште и Сонѣдриште единственно.*

Разрѣш. 1. Изъ § 262. V. Образца 3,

$\text{Сон. } 2\varphi = 1 - 2\,\text{Нѣд. } \varphi^2$ быва

премештанѣмъ $2\,\text{Нѣд. } \varphi^2 = 1 - \text{Сон. } 2\varphi,$

и одтудъ $\text{Нѣд. } \varphi = \sqrt{\dfrac{1 - \text{Сон. } 2\varphi}{2}}.$

Разрѣш. 2. Изъ § 262. V. Образца 4

$\text{Сон. } 2\varphi = 2\,\text{Сон. } \varphi^2 - 1$ быва

премештанѣмъ $\text{Сон. } 2\varphi^2 = \text{Сон. } 2\varphi + 1,$

и одтудъ $\text{Сон. } 2\varphi = \sqrt{\dfrac{\text{Сон. } 2\varphi + 1}{2}}.$

265.

VIII. *Изнаћи дирку единственногъ угла.*

Разрѣш. $\text{Дир. } \varphi = \frac{\text{Нѣд. } \varphi}{\text{Сон. } \varphi}$

$$= \frac{\sqrt{\frac{1 - \text{Сон. } 2\varphi}{2}}}{\sqrt{\frac{\text{Сон. } 2\varphi}{2}}} = \sqrt{\left(\frac{1 - \text{Сон. } 2\varphi}{1 + \text{Сон. } 2\varphi}\right)};$$

Числит. и именит. чрезъ Сон. 2φ дѣлећи $= \sqrt{\frac{\frac{1}{\text{Сон. } 2\varphi} - 1}{\frac{1}{\text{Сон. } 2\varphi} + 1}}$

$$= \sqrt{\left(\frac{\text{Сѣч. } 2\varphi - 1}{\text{Сѣч. } 2\varphi + 1}\right)},$$

Числит. и именит. са (Сѣч. $2\varphi + 1$) множећ. $= \sqrt{\left(\frac{\text{Сѣч. } 2\varphi^2 - 1^2}{(\text{Сѣч. } 2\varphi + 1)^2}\right)}$

$$= \frac{\text{Дир. } 2\varphi}{\text{Сѣч. } 2\varphi + 1}.$$

А кадъ се іоштъ числит. и именит. са (Сѣч. $2\varphi - 1$) умножи, изишло бы $= \sqrt{\frac{(\text{Сѣч. } 2\varphi + 1)^2}{(\text{Сѣч. } 2\varphi - 1)^2}}$

$$= \frac{\text{Сѣч. } 2\varphi + 1}{\text{Дир. } 2\varphi}.$$

266.

Слѣдства. 1. Изъ овога є видити, да є

$$
\begin{array}{l}
\text{Нѣд.}\,(\alpha+\beta)=\text{Нѣд.}\,\alpha\,.\,\text{Сон.}\,\beta+\text{Сон.}\,\alpha\,.\,\text{Нѣд.}\,\beta\ \S\,259,\\
\text{Нѣд.}\,(\alpha-\beta)=\text{Нѣд.}\,\alpha\,.\,\text{Сон.}\,\beta-\text{Сон.}\,\alpha\,.\,\text{Нѣд.}\,\beta\\
\hline
\text{Сумма}\ =2\ \text{Нѣд.}\,\alpha\,.\,\text{Сон.}\,\beta.\\
\text{Разлика}=2\ \text{Сон.}\,\alpha\,.\,\text{Нѣд.}\,\beta.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
2.\ \text{Сон.}\,(\alpha+\beta)=\text{Сон.}\,\alpha\,.\,\text{Сон.}\,\beta-\text{Нѣд.}\,\alpha\,.\,\text{Нѣд.}\,\beta\\
\quad\text{Сон.}\,(\alpha-\beta)=\text{Сон.}\,\alpha\,.\,\text{Сон.}\,\beta+\text{Нѣд.}\,\alpha\,.\,\text{Нѣд.}\,\beta\\
\hline
\text{Сумма}\ =2\ \text{Сон.}\,\alpha\,.\,\text{Сон.}\,\beta.\\
\text{Разлика}=2\ \text{Сон.}\,\alpha\,.\,\text{Нѣд.}\,\beta.
\end{array}
$$

Изъ овога се ясно види, коимъ се начиномъ сумме и разлике Нѣдришта и Сонѣдришта у производе обратити могу, или производи у сумме и разлике.

267.

Изнаћи отношеніе међу странама тригла и єднимъ угломъ.

1. Да се назначе углови великимъ писменима, а стране онымъ истымъ писменима коима су и супротни углови назначени но малыма, быће

$$2.\quad a:б=\text{Нѣд.}\,A:\text{Нѣд.}\,Б,\ \text{и Нѣд.}\,Б=\frac{б\,.\,\text{Нѣд.}\,A}{a}$$

$$a:c=\text{Нѣд.}\,A:\text{Нѣд.}\,C,\ \text{и Нѣд.}\,C=\frac{c\,.\,\text{Нѣд.}\,A}{a}.$$

3. Будући да свакій угалъ тригла са осталымъ двома раванъ є двома десныма или 180°,

тако се као нъіовъ доугалъ сматра, а такови угли равна нѣдришта имаю, бы́ће

$$\text{Нѣд. } C = \text{Нѣд. } (A + Б),$$

али Нѣд. $(A + Б)$, то є нѣдрище сумме: бы́ће

$$\text{Нѣд. } C = \text{Нѣд. } A \,.\, \text{Сон. } Б + \text{Сон. } A \,.\, \text{Нѣд. } Б.$$

4. Кадъ се овде на мѣсто нѣдришта C и нѣд. $Б$ изнађене вредности подъ числомъ 2. поставе, и уравненіє се чрезъ нѣд. A, а после умножи са a, быва

$$c = a \,.\, \text{Сон. } Б + б \,.\, \text{Сон. } A.$$

5. *То есть, да се умноже две стране триугла, свака са сонѣдриштемъ долежећегъ угла; бы́ће сумма оба производа равна страни трећой.*

6. По числу 4. є $c = a \,.\, \text{Сон. } Б + б \,.\, \text{Сон. } A$, препашанѣмъ $б \,.\, \text{Сон. } A$, быва $c - б \,.\, \text{Сон. } A = a \,.\, \text{Сон. } Б.$ оба члена подизаюћи на квадратъ; $c^2 - 2бc \,.\, \text{Сон. } A + б^2 \,.\, \text{Сон. } A^2 = a^2 \,.\, \text{Сон. } Б^2$, но будући да є $\text{Сон. } A^2 = (1 - \text{Нѣд. } A^2)$ а $\text{Сон. } Б^2 = (1 - \text{Нѣд. } Б^2)$, ова израженія поставляюћи на мѣсто оны́, быва

$$c^2 - 2бc \,.\, \text{Сон. } A + б^2\,(1 - \text{Нѣд. } A^2) = a^2\,(1 - \text{Нѣд. } Б^2).$$

У првомъ члену уравненія умноженіє назначено свршиваюћи, а у другомъ на мѣсто Нѣд. $Б^2$ равноважно израженіє подъ числомъ 2 изнађено но найпре на квадратъ узвышено поставляюћи, и такођеръ назначено умноженіе свршивајући, быва:

$$c^2 - 2бc\,.\,\text{Сон.}\,A + б^2 - б^2\,.\,\text{Нѣд.}\,A = a^2 - б^2\,.\,\text{Нѣд.}\,A,$$

но будући да се $-б^2$ Нѣд. A у оба члена уравненія наоди, такова се може изоставити, и быће

$$c^2 - 2бc\,.\,\text{Сон.}\,A + б^2 = a^2,$$

одтудъ $б^2 + c^2 - a^2 = 2бc\,.\,\text{Сон.}\,A,$

и $\dfrac{б^2 + c^2 - a^2}{2бc} = \text{Сон.}\,A.$ т. е.

Сонѣдрилите угла изъ задаты' трію страна налазисе, кадъ се квадратне стране траженый угалъ заклюгавајуће соберу, одтудъ се квадратъ треће стране одузме, и разликасе грезъ удвоеный производъ страна, кое угалъ пожеланый заклюгавају, раздѣли.

7. Да бы изъ предидућегъ образца нѣдриште истога угла изнаћи могли, треба да се опоменемо, да є

$$\text{Нѣд.}\,A^2 = (1 - \text{Сон.}\,A^2) = (1 + \text{Сон.}\,A)(1 - \text{Сон.}\,A).$$

8. Али $(1 + \text{Сон.}\,A) = \dfrac{2бc + б^2 + c^2 - a^2}{2бc},$

$$= \frac{(б + c + a)(б + c - a)}{2бc}.$$

9. Тако исто є $(1 - \text{Сон.}\,A) = \dfrac{2бc - б^2 - c^2 + a^2}{2бc},$

$$= \frac{(a + c - б)(a + б - c)}{2бc}.$$

10. Одтудъ израженія подъ чис. 8 и 9 међусобно уважавајући быва

$$\text{Нѣд. } A^2 = \frac{(a+б+c)(б+c-a)(a+c-б)(a+б-c)}{4б^2c^2},$$

11. Извлаченѣмъ $\sqrt{}$ быва Нѣд. A

$$= \frac{\sqrt{(a+б+c)(б+c-a)(a+c-б)(a+б-c)}}{2бc}$$

$$= \frac{u}{2бc}$$

12. Ово се наставленіе речма овако изговара: *Да се учини сумма свію страна; далѣ одъ сумме двею да се одузме трећа, тако ће се добыти три разлике. Она сумма и ове три разлике да се међусобно умноже, коренъ извуче, и чрезъ удвоеный производъ страна, кое пожеланый уголъ заключавају, раздѣли.*

268.

Изнаћи полупречникъ оногъ окружія, кое преко ошиля тругла, когда су стране задате, прелази.

Разрѣш. Да назначимо пожеланый полупречникъ са p; быће $p = БГ$,
быће по разрѣшенію тругла равнокракогъ $БГС$

$$a = 2БГ \,.\, \text{Нѣд. } \tfrac{1}{2}\, Г = 2p : \text{Нѣд. } A;$$

$$\text{дакле } p = \frac{a}{2\text{Нѣд. } A};$$

но будући да е по предид. § ч. 11.

$$\text{Нъд. } A = \frac{\sqrt{(a+б+c)(б+c-a)(a+c-б)(a+б-c)}}{2бc};$$

быће такођеръ

$$p = \frac{абc}{\sqrt{(a+б+c)(б+c-a)(a+c-б)(a+б-c)}}.$$

269.

Изъ задаты трїю страна триугла, површину нѣгову изнаћи.

Разрѣш. 1. Кадъ се изъ угла $Б$ спуштеӥа отвѣсна назначи $БД = x$. а површина триугла са T, быће по § 195.

$$T = \frac{xб}{2},$$

2. Али по Тригонометрическимъ основима

$$x = c. \text{ Нъд. } A;$$

$$\text{дакле } T = \tfrac{1}{2} бc. \text{ Нъд. } A = \tfrac{1}{4} u.$$

3. Изъ задате површине T и изъ задаты двею страна $б, c$, наћисе може Нъд. A изъ уравненїя овога § числ. 2.

$$T = \tfrac{1}{2} бc. \text{ Нъд. } A,$$

$$\text{Нъд. } A = \frac{2T}{бc},$$

4. Изъ задате површине, єдне стране, и угла, изнаћисе може друга страна овай угалъ съ другомъ заваћаюћа, изъ истогъ уравненїя.

$$T = \frac{1}{2}\, бс \text{ Нѣд. } A,$$ тражећи c, быће

$$c = \frac{2T}{б \text{ Нѣд. } A}.$$

Примѣчаніе. Кои се са разрѣшеніяма овыма добро позна, тай ће моћи и многе друге задатке безъ сваке теготе разрѣшити.

ОДДѢЛЕНІЄ ТРЕЋЕ.

СТЕРЕОМЕТРІЯ.

ГЛАВА ПРВА.

О ПОНЯТІЮ, ПОВРШИНАМА, И ЗАПРЕМИНАМА ТѢЛА.

270.

Изясненіе. *Сталность* или *Тѣло* у Математіки зовесе количество просторно, (§ 4.), кое се на три управленія разшируе.

271.

Изясн. *Запремина* тѣла зовесе онай просторъ, кое тѣло у овой неизмѣримой шупльини заузима, то есть у смотренію нѣговогъ простираня.

272.

Изясн. *Површина* тѣла, зовесе крайнѣ тѣла простиранѣ, сталность нѣгову опредѣлявајуће, и са свію страна окончавающесе. *Основъ* тѣла е ова површина, на коіой тѣло почива, или се да почива представля. Изъ ошиля нѣговогъ, т. е. изъ найвышше тѣла точке на нѣговъ основъ спуштена отвѣсна, представля *высину* нѣгову.

273.

Изяснен. Выше углова површины као фіг. **115.** *АнБ, АнВ* и *ВнБ* у обштемъ ошилю *н* стицающійсе, меѓусобно нагибающійсе, са своима странама узаймно додирающійсе, сачинявaю *угалъ сталный или тѣлесный.* *ф.* 115.

274.

Слѣд. За сочиненіе угла тѣлесногъ найманѣ три угла површина быти мораю. Ѥръ два угла површна са обадвема странама додиратисе не могу (§ 191.), али три и выше нњи могусе додирнути, и угалъ тѣлесный сочинити.

275.

Настав. *Сви углови површни, угалъ тѣлесный сачинявающи, имаю манѣ одъ 360 степеній.*

Доказат. Сви углови површни на равной површини око обштегъ ошиля положены, слѣдователно меѓусобно не нагнути, скупа имаю 360° (§ 44. ч. 2.); дакле сви углови површни, угалъ тѣлесный сачиняваюћи, и тако међусобно нагнути, манѣ одъ 360° имати мораю (§ 273.).

276.

Изяснен. Она тѣла, коя се многимъ површинама равнымъ покриваю, и опредѣляваю, вообште зовусе *полиедра*, а поособъ по числу површина, коима се покриваю, зовесе *тетраедронъ*, са четиръ површине: *пентаедронъ*, са петъ: *ексаедронъ*, са шестъ површина равны' опредѣлѣно и проч. Полиедра друга су *правилна*, а друга *неправилна*; она се окончавають површинама равнымъ правилныма, међусобно равныма, као и угловима тѣлеснымъ међусобно равныма; а ова неправилныма.

277.

Изяснен. Полиедра *подобни* зовусе међусобно она, коя се равнымъ числомъ површина равны', међусобно подобны', толико углова тѣлесны', међусобно равны', сочиняваюћій, опредѣляваю. Ако су оне површине іоштъ соотвѣтствено равне, полиедра *подобна* и *равна* зовусе.

278.

Слѣд. Оваковы' полиедра правилны' има слѣдуюћіи видова: *тетраедронъ* са четиръ тригонима правилныма међусобно равныма опредѣ-

ленъ фіг. 116 : *октаедронъ* са осамъ равнымъ ф. 116.
тригонима правилнымъ као фіг 117 : *ікосаедронъ*, ф. 117.
са двадесетъ тригонима правилныма меѣусобно
равныма опредѣленъ, као фіг. 118 : *ексаедронъ* ф. 118.
са шестъ тетрагонима правылнима меѣусобно рав-
ныма или квадратима опредѣленъ, као фіг. 119; ф. 119.
додекаедронъ, са дванайстъ пентагонима прави-
лныма меѣусобно равныма опредѣленъ, као фіг. 120. ф. 120.

279.

Изяснен. Ако представимо, да се некій
полигонъ *АБВДЕ* фіг. 121. изъ положенія свогъ ф. 121.
по повученой некой правой лініи, кою мы *упра-
вителницомъ* зовемо, непресѣчно и себи равноте-
кући движе и трагъ свой после себе да заостав-
ля, докъ негди одъ движенія свога престане,
изродићесе тѣло, кое вообще *призма* зовемо.
Ако є полигонъ производећій квадратъ, и высина
призматова равна страни квадрата, призма овако-
вый, кои є ексаедронъ правилный, поособъ зове-
се *кубусъ* (Геометрическій) фіг. 119 : ако є ос- ф. 119.
новъ производећій параллелограммъ, изродићесе
оваковимъ движеніемъ поособъ *параллелепипе-
донъ*, као у фіг. 122 : ако є основъ произвоећій ф. 122.
кругъ, раѣасе призма, нарочито *валякъ* (цылин-
деръ) названый као у фіг. 123. ф. 123.

280.

Слѣдства. Призматова површина, по оду-
зетомъ горнѣмъ и долнѣмъ основу, опредѣлюесе

са толико параллелограмма равно високи' еднаку са призматомъ висину имаюћій, колико е страна у полигону производећемъ. Свака страна полигона производећегъ непресѣчнымъ, и равнотекућимъ движенiемъ рађа параллелограммъ еднаке са призматомъ висине.

2. Призма рађасе изъ основа производећегъ, толико пута узетогъ, колико е точкій у висини нѣговой.

281.

Изяснен. Призма по виду и по основу производећемъ зовесе *триуголный*, *четвороуголный*, и проч. као што буде основъ производећій, триуголный, четвоространый и проч. *Призма правъ* зовесе, кадъ е нѣгова управителница на основъ
ф. 121. отвѣсна, као фiг. 121. 124, *коссъ* (косовитъ):
ф. 124. кадъ е управителница косса на основицу, као у
ф. 125. фiг. 125.

282.

Изяснен. Кадъ вообразимо себи, да се
ф. 126. некій полигонъ *АБВД* фiг. 126. изъ положенiя свогъ трагомъ неке праве лiнiе управителнице тако непресѣчно и равнотекући движе, и трагъ свой после себе да заоставля, да се свакогъ магновенiя движенiя нѣговогъ неке частице страна нѣговы' губе и умалявају, докъ се напоследку таковымъ умаляванѣмъ у едну точку неслiе, из-

родићесе *пирамида*, коя є по виду фігуре основа производећегъ *триуголна* или *тригона*, *тетвороуголна* или *тетрагона*, *петоуголна* или *пентагона*, *ексагона* и проч. Пирамида *права* зовесе, кадъ нѣнъ врѣ точки цѣлогъ основа средньой надстои, или кадъ лінія отвѣсна, изъ вр'а нѣногъ на основицу спуштена, пада на точку цѣлогъ основа средню : иначе є *косса*.

283.

Слѣд. 1. Пирамида, по одузетомъ основу, заключавасе толикимъ триуглима, колико є страна у нѣговомъ основу производећемъ. Сви ови триугли имаю у пирамиди правой равну высину, коя є отвѣсна, изъ вр'а пирамиде на ма кою основа страну спуштена.

2. Пирамида состоисе изъ толико фігура или полигона, основу подобны', колико є точкій у высини нѣной (§ 272). Стране овы' полигона изъ вр'а пирамиде къ основу, расту непресѣчно неопредѣленомъ частію, слѣдователно, кадъ се неопредѣлене точке у нѣной высини налазе, стране, па тако и полигона она сачиняваю безконечный редъ чисала наравны' (Алгебра § 168).

284.

Изяснен. Ако є основъ производећій пирамиде кругъ, пирамида овакова поособъ зовесе *ошилякъ* (conus).

285.

Слѣдства. 1. Ошилякъ такођеръ или є *правъ*, или *коссъ*, као и пирамида (§ 281.).

2. Ошилька правогъ пупчаста површина (по одузетомъ основу, кои се поособъ изнаћи има) равна є производу изъ полуокружія круга про-
ф. 127. изводећегъ и ошилька стране *АБ* фіг. 127., съ коіомъ се отвѣсна, изъ врˈа на ма кою основа страну спуштена, поклапа.

Примѣчаніе. Опредѣленіе дубасте површине ошилька оставлясе Математики вышшой.

286.

Изяснен. Ако се основъ производећій у движенію своме пре заустави, него што се у
ф. 128. точку смаия, изродиѣсе пирамида *одбіена* фіг. 128.
као, ако є основъ производећій кругъ, ошилякъ
ф. 129. *одбіеный*, фіг. 129.

287.

Слѣд. Пирамида одбіена (са изключеніемъ основа) опредѣлюесе са толикимъ трапезіяма равно высокима, две супротне стране равнотекуће имаюћима, колико є страна у основу производећемъ.

I. ПРИЗМА.

288.

Наставл. *Површина призмата правогъ, (по изклюценимъ основима) равна є производу изъ омѣрія основа производеѣегъ и высине призматове,*

Доказат. Површина призматова, (по изключенымъ основима) опредѣлюссе толикимъ параллелограммовима, ону исту са призматомъ висину имаюћима, колико є страна у основу производеѣемъ (§ 279.); али свакога таковогъ параллелограмма површина равна є производу изъ основа нѣговогъ и высине призматове (као высине обште) § 194; дакле свію овы параллелограмма, слѣдователно и сама призматова површина пострана равна є производу изъ основа свію овы параллелограмма и высине призматове, али основи свію овы параллелограмма сачиняваю омѣріе основа производеѣегъ; дакле.

289.

Слѣдства. 1. Површина валька правогъ, као призмата округлогъ, осимъ основа, равна є производу изъ окружія круга производеѣегъ и высине. Одтудъ.

2. Ако є высина валька равна своме пречнику, пострана или пупчаста нѣгова површина бы-

ће учетворена основа производећегъ. Єръ пупчаста валька површина равна є нѣноме производу изъ окружія круга производећегъ и высине валька, или пречника высини (по представляню) равногъ, а површина основа, или круга производећегъ равна є само єдной четвртой части истога производа (§ 203. ч. 2.).

3. Ако се површине основа' призматовы по особъ опредѣле, и къ пострaной нѣговой површини додаду, добыћесе цѣла површина призматова (као и валькова).

290.

Настављ. *Сталность (или запремина) призматова равна є производу изъ основа производећегъ и высине нѣгове.*

Доказат. Призма ніє ништа друго, него основъ производећій, толико пута узетъ, колико є точкій у высини, али то є производъ изъ основа производећегъ и высине; дакле

291.

Слѣдства. Дакле и валькова сталность равна є производу изъ круга производећегъ и высине.

2. Да бысмо запремину валька шуплѣгъ или цеви изнаћи могли, опредѣлити треба найпре запремину валька, као изъ тѣла сталногъ, па пос-

ле пообобъ изтражити треба шупльину валька као сталность, и ову одузети одъ запремине, пре опредѣлене.

Примѣчаніе. Сталности е мѣра найспособнія кубусъ, збогъ постояне, удобне, и уредне запремине свое: имено хватъ кубическій, стопа кубическа, палацъ кубическій, и проч. *Мѣрити* тѣло нѣко, зовесе изражививати, колико оно оваковы' кубически' хватій, стопа, палаца кубически' и проч. у запремини своіой садржава. Найудеснія е мѣра, стопа кубическа, коя у ширину, дужину и высину по едну стопу дужине за мѣру има, кою дакле са свію страна окружава равна поршина квадратна; дакле стопа кубическа е коцка, имаюћа са свію страна површину равну едной стопи квадратной. Свака стопа кубичечка има 1728 кубически' палаца, свакій палацъ 1728 куб. лінія и. т. д. Збиръ одъ 216 кубически' стопа сачинява хватъ кубическій. Знакъ, коимъ се кубусъ означава есть *c*, или квадратъ ⊠, двема двоуголпима назначенъ, коме се знаку іоштъ додае съ леве стране обичный знакъ хвата, стопе и палца, Тако 3^{0c}, $7'^{c}$, или $3^{0⊠}$, $7'^{⊠}$ значи 3 хвата кубическа, седамъ стопа кубическій.

II. ПИРАМИДА.

292.

Настава. *Површина пирамиде праве, осимъ основа, равна е производу изъ полуомѣрія* *основа и лініе отвѣсне изъ ошиля пирамиде на ма кою основа страну спуштене.*

Доказат. Површина она пирамиде состоисе изъ толико триуглова равно высоки', колико e страна у основу производеѣемъ, али површина оны' триуглова равна e реченоме производу; еръ основи ньіови скупа износе омѣріе основа производеѣегъ, а површина свакога триугла равна e производу изъ пола основице и высине (§ 195.), коя e овде она иста са предреченомъ отвѣсномъ.

293.

Слѣд. Пошто триугли, коима се косса пирамида покрива, сви нису равно высоки, поособъ ньіове површине изнаѣи валя, и осимъ основа у сумму ій собрати, тако ѣемо добыти цѣле пирамиде коссе површину.

294.

Настав. *Површина пирамиде праве одбіене, основе равнотекуѣе имаюѣе (осимъ основа) равна e производу изъ полусумме омѣрія основа' и отвѣсне, меѣу сваке две супротне основа' стране наодеѣесе.*

Доказат. Површина овакове пирамиде одбіене (осимъ основа) состоисе изъ толико трапезія равно высоки', две супротне стране равнотекуѣе имаюѣи', колико e у основу производећемъ страна (§ 286), али површина свію овы' трапезія равна є изложеномъ производу; єръ свакога оваковогъ трапезія површина равна є полусумми двею супротны' равнотекући' страна и отвѣсне међу нъима наодећесе, а све оне стране равнотекуће сочинявао омѣріє основа.

295.

Слѣдства. 1. Ошилька правогъ одбієногъ (кои се само округлостію своіомъ одъ пирамиде разликує) пупчаста површина равна є производу изъ полусумме окружія' основа' и стране истога ошилька одбієногъ.

2. Пупчаста ошилька одбієногъ правогъ површина равна є такођеръ страни ошилька и окружія, међу основима окружія' среднѣ аритметически соразмѣрногъ. Єръ оваково среднѣ соразмѣрно окружіє равно є полусумми окружія' оба основа. Да назначимо окружіє горнѣгъ основа $= n$, долнѣгъ $= П$, среднѣ међу овима двама $= C$; быће соразмѣрность

$$n : C = C : П,$$

$$\text{одтудъ } C = \frac{n + П}{2}. \text{ (Алгебра § 118.)}$$

296.

Наставл. *Сталность пирамиде праве цѣле равна є єдной трећой части производа изъ основа производећегъ и высине пирамиде.*

Доказат. Пирамида состоисе изъ безчисленны' полигона, основу подобны', неопредѣленомъ частію страна свои' изъ вр'а къ основу непресѣчно растенiй (§ 283. ч. 2.), дакле, да бы сталность пирамиде опредѣлити могли, опредѣлитисе има найпре сумма оны' безчислены' полигона, основу подобны', а и сумма нѣiова равна е едной трећой части производа изъ основа производећегъ и высине пирамиде; еръ, кадъ се она полигона, као подобна имаю као квадрати страна соотвѣтственны' (§ 210. ч. 2.), а стране, кое изъ вр'а къ основу неопредѣленомъ частію расту, слѣдую редомъ безконечнымъ чисала наравны', она полигона подобна сачинявaю истый онай редъ безконечный, кои сачинявaю квадрати чисала наравны' али сумма квадрата' чисала наравны', редъ безконечный сачинявaюћи', равна е едной трећой части производа изъ члена последнѣга и числа членова (Алгебра § 175.), дакле и сумма оны' полигона подобны', изъ кои' трагова као кожурица пирамида се состои, равна е истомъ производу, али овде е последнiй членъ основъ производећiй, а число членова изражава высина пирамиде; еръ е толико оваковы' полигона у пирамиди, колико е точкiй у высини; дакле.

297.

Слѣдства. 1. Одтудъ сталность ошилька правогъ цѣлогъ, кои е округла пирамида, равна є такођеръ єдной трећой части производа, изъ круга основногъ и высине нѣгове.

2. Ако дакле пирамида нека са призматомъ, и ошилякъ са валькомъ некимъ исту то єсть равну высину и основъ имали буду, быће пирамида призмата, а ошилякъ валька трећа часть (коєсе посредствомъ призмата триуголногъ древеногъ, на три усмотренію сталности равне части вешто сѣченогъ, очевидно изразити може.

3. Ако пирамида и ошилякъ имаю исте высине и површине основа равне, равне ће быти такођеръ и ньіове сталности. Исто є тако са призматомъ и валькомъ.

4. Кадъ се пирамиде одбієне фіг. 128. као ф. 128.
цѣле, и ошилька одбієногъ фіг. 129. такођеръ ф. 129.
као цѣлогъ сталности поособъ, а горньи́ допунявающи́ частій такођеръ поособъ опредѣле, и овы́ се сталность одъ цѣлы́ сталностій одузму, добыћесе одбієны́ оваковы́ тѣла сталности; или ако се међу основомъ горньимъ и дольнимъ изнађе среднѣ аритметически соразмѣрна, и ова се умножи са высиномъ пирамиде одбієне, или ошилька одбієногъ.

Примѣчаніє. Равнымъ начиномъ опредѣлитисе може запремина бурета, коя се такођеръ состои изъ два ошилька одбієна; кои́ се основи већи међусобно на средини бурета додираю.

III. СФЕРА ИЛИ КРУГЛА (Globus).

298.

ф. 130. Изясн. *Сфера* или *кругла К* (фіг. 130). таково є тѣло, коега ограничіє или поєдине сполянпнѣ точке, одъ среднѣ точке, коя се средоточіє нѣно зове, равно отстоє. Постанѣ нѣно представитисе може, кадъ се полукругъ око пречника свогъ као око осе окрене, и после себе трагъ свой заостави. Но у таковомъ полукругу производећемъ представитисе могу или 1) безчисленне лініє отвѣсне изъ пречника *АБ* у найближымъ међусобнымъ отстоянніяма на полуокружіє повуче-
ф. 131. не, и тако међусобно равнотекуће као што фіг. 131. предлаже: или 2) толико окружія сасредоточны', слѣдователно равнотекући', колико є точкій
ф. 132. у полупречнику *ВД* фіг. 132. У првомъ постаня предположеню произлази сфера изъ толико ошиляка одбієны', неопредѣлены' малы' высина', колико се две и две лініє равнотекуће у полукругу производећемъ налазе; еръ лукови, кои се међу равнотекућима налазе, као неопредѣлено' мали, са диркама слѣдователно са странама ошиљка судараюсе, за праве лініє узетисе могу. У другомъ сфере постаня пуедпоставляню, произлази она изъ толико сферически' или кора сасредоточны', слѣдователно равнотекући', колико є у полупречнику полукруга производећегъ точкій.

299.

Слѣдства. 1. Высине свію оны' ошиляка одбіены' изъ кои' се сфера да произлази представля, заедно узете, износе высину или пречникъ сфере, површине пакъ пупчасте оны' ошиляка одбіены' скупа износе површину сфере.

2. Полупречници оны' найтаньи' кора сасредоточны', изъ кои' се сфера состои, одъ средоточія къ найкрайньой точки полупречника сфере расту редомъ безконечнымъ чисала наравны'. Єръ се у полупречнику сфере безконечне точке, слѣдователно и безконечны' оны' кора сасредоточны' полупречници налазе.

300.

Изяснен. Кадъ представимо себи, да се сфера површиномъ некомъ сѣче, одсѣчена часть свагда ће представляти кругъ. Ако прелази површина сѣчећа преко средоточія сфере, сѣченіе показаће кругъ найвећій. Одтудъ лако се разуме, кои є *кругъ найвећій* сфере, и кое є *окружіе круга найвећега.*

301.

Наставл. *Пупчаста површина свакога ошилька одбіеногъ одъ оны', изъ кои' се сфера состояти разумева, равна є производу изъ вы-*

сине истога ошилька одбіеногъ и окружія найвећега круга сфере.

ф. 133. Доказат. Да представимо себи у фіг. 133. сферу; она ће се садржавати у *АБВДЕФГХА* окружію круга найвећега. *У АВЕГ* да представимо онаковый ошилякъ одбіеный (изъ кои' се сфера садржавати предпоставля), коега є горный основъ окружный и овога окружіе у *АГ* (кое са стране сматраюћи нѣговъ пречникъ изражава), а долный основъ окружный и овога окружіе да буде *ВЕ;* међу окружіяма овы' основа окружны среднѣ аритметически соразмѣрно окружіе да се помысли у *БФ.* Сфере высина или пречникъ *ХМД* да буде на ошилька одбіеногъ основе отвѣсна; бы'ће *IЛ* высина ошилька одбіеногъ. Окружіе круга найвећега *АВДЕХА*, коега полупречникъ *БМ* да се къ среднѣ аритметичеки соразмѣрногъ окружія *БФ* точки *Б* повуче, да назовемо *П;* окружіе, међу ошилька одбіеногъ основа окружіяма среднѣ соразмѣрно, коега є полупречникъ *БК*, да назначимо са *с.* По овомъ предпоставляню, пупчаста ошилька одбіеногъ *АВЕГ* површина по познатомъ изложеномъ начину равна є производу изъ стране ошилька и окружія, међу ошилька основыма среднѣ соразмѣрногъ, или равна є производу

$$АВ \times с,$$

а производъ изъ высине ошилька одбіеногъ и окружія круга найвећега сфере бы'ће

$$IЛ \times П,$$

али $AB \times c = IЛ \times П$,

Єръ кадъ се изъ A на BE спусти отвѣсна AH, быће $\triangle HAB \sim \triangle KБM$, што е осимъ углова AHB и $БKM$ десны', угалъ ABH = углу $БMK$ збогъ єдне и оне исте мѣре; єръ угалъ $БMK$ или $БMX$ за мѣру има лукъ $БX$, али истій лукъ за мѣру има и угалъ ABH, што е угалъ ABH или ABE = углу $AБФ$ збогъ $БФ \# BE$, али угалъ $AБФ$ за мѣру има лукъ $БX$ (§ 78.); дакле истій онай лукъ има и угалъ ABH за мѣру; трећій угалъ равань е трећемъ (§ 115. ч. 7.); а у триуглима подобнима стране су соотвѣтствене соразмѣрне (§ 161.); дакле

$$AB : AH = БM : БK,$$

или збогъ $AH = IЛ$ (§ 55. ч. 4.), дакле $IЛ$ мѣсто AH поставляюћи, быће

$$AB : IЛ = БM : БK;$$

далѣ, кадъ се окружія имаю као полупречници (§ 183.), на мѣсто овы' поставляюћи, быће

$$AB : IЛ = П : c,$$

одкудъ производъ споляшньи' членова равань е производу внутрены' (Алгебра § 120.), быће

$$AB \times c = IЛ \times П;$$

дакле.

302.

Наставл. *Површина сфере равна е производу изъ окружія круга найвећега и пречника или высине сфере.*

Доказат. Пупчаста површина свію оны' ошиляка одбіены' заєдно узеты', изъ кои' се сфера состояти разумева, сачинява површину сфере, али пупчаста свію оны' ошиляка одбіены' површина равна є производу изъ окружія круга найвеђега и пречника сфере. Єръ свакога оваковогъ ошилька одбіеногъ пупчаста површина равна є производу изъ окружія круга найвеђега сфере и высине истога ошилька (§ 301.), дакле, кадъ высиве свію оны' ошиляка одбіены', скупа узеты', износе пречникъ сфере (§ 299. ч. 1.), површина пупчаста свію оны' ошиляка одбіены' равна є производу изъ окружія круга найвеђега и пречника, дакле и површина сфере равна є истоме производу.

303.

Слѣдства. 1. Површина сфере дакле равна є пупчастой површини валька (то есть осимъ основа'), равну высину, и пречникъ са сферомъ имаюђегъ. Єръ ако се равна она высина или пречникъ назначи са P, а окружіє са Π, быђе како сфере, тако и валька површина $= P\Pi$ (§ 302.).

2. Површина є сфере учетворена круга найвеђега. Єръ површина сфере равна є цѣломъ производу изъ пречника и окружія круга найвеђега (§ 302); а површина круга найвеђега равна є єдной четвртой части истога производа (§ 203. ч. 1.).

304.

Наставл. *Површине сфера' имаю се као квадрати пречника' и полупречника' исты' сфера'.*

Доказат. Єръ, ако се површина едне одъ двею сфера' назначи са $П$, а друге са $п$, кругъ найвећій едне са $К$, а друге са $к$: овы' полупречници $Р$ и $р$: пречници са $Д$ и $д$, быће

$$П = 4К,$$

$$\text{и } п = 4к \text{ (по § 303. ч. 2.)};$$

$$\text{одтудъ } П : п = 4К : 4к,$$

$$\text{и одтудъ } П : п = К : к \text{ (Алгебра § 125. VI.)},$$

$$\text{али } К : к = Р^2 : р^2 = Д^2 : д^2 \text{ (§ 210. ч. 4.)};$$

$$\text{дакле } П : п = Р^2 : р^2 = Д^2 : д^2.$$

305.

Наставл. *Површина сфере имасе на цѣлу површину валька, равну высину, и пречникъ са сферомъ имаюћегъ, као 2 на 3.*

Доказат. Єръ пошто е оваковогъ валька пупчаста површина, као површини сфере равна, (§ 303. ч. 1.), учетворена круга найвећега сфере (§ 303. ч. 2.), кои е са кругомъ производећимъ валька онай истій, цѣла површина валька (скупа са основима) ушесторена е круга найвећега, слѣдователно површина сфере $П$ имасе на цѣлу оваковогъ валька површину $п$, као $4К : 6к$,

$$\text{или } П : п = 4К : 6к,$$

$$\text{или } П : п = 2 : 3 \text{ (Алгебра § 125. VI.)}.$$

306.

Настав. *Сталность сфере равна е едной треħой части производа изъ површине нѣне и полупречника.*

Доказат. Найтанѣ оне коре сасредоточне сферическе, изъ кои' се сфере сталность состояти разумѣва (§ 298. ч. 2.), имаюсе као квадрати полупречника' (§ 304.), дакле, кадъ ньіови полупречници слѣдую редомъ безконечнымъ чисала наравны' (§ 299. ч. 2.), они исти сачиняваю редъ безконечный квадрата чисала наравны'; дакле опредѣлити сталность сфере толико е као опредѣлити сумму квадрата чисала наравны', редъ безконечный сачиняваюħи', у комъ се число членова полупречникомъ, а последнѣій членъ последньомъ ономъ коромъ, или површиномъ сфере излаже, али по Алгебри § 175., сумма квадрата реда безконечногъ чисала наравны' равна е едной треħини производа изъ квадрата члена последнѣга и числа членова предидуħи'; дакле.

Примѣчаніе. На примѣръ, ако бы быо пречникъ или высина сфере $=14'$, дакле полупречникъ $=7'$, быħе окружіе круга найвеħега $=44'$ (§ 183 и Примѣч.), одтудъ површина сфере $=14' \times 44' = 616'^{\square}$ (§ 302.), а сталность

или запремина сфере $= \dfrac{616^{\square'} \times 7}{3} = 1437\ \frac{1}{3}$ ⊡'.

307.

Слѣдства. 1. Сталность дакле сфере равна є двема трећимъ частима производа изъ круга найвећега и пречника сфере. Да буде кругъ найвећій $=К$, пречникъ $=Д$, бyће површина сфере $=4К$ (§ 303. ч. 2.), и полупречника єдна трећа $=\frac{1}{6}Д$ (као што є очевидно), дакле сфере сталность $=4К \times \frac{1}{6}Д$ (306.), $=\frac{4}{6}КД = \frac{2}{3}КД$. Одтудъ

2. Сталность сфере равна є двема трећимъ частима валька, ону исту высину, и пречникъ са сферомъ имаюћегъ. Єръ сталность сфере равна є $\frac{2}{3}$ частима производа изъ круга найвећега и пречника (по § 307. ч. 1.), а сталность оваковогъ валька равна є цѣломъ оваковомъ производу (§ 291.).

3. Дакле и сталность сфере, или сфера имасе на валякъ исте высине и пречника, као $2:3$ (§ 302.). Єръ ако се сталность или запремина сфере назначи са $З$, а валькова са $з$; быва $З = \frac{2}{3}КД$ (§ 307. ч. 1.), а $з = КД$ (§ 291.); дакле $З:з = \frac{2}{3}КД:КД$, одтудъ, последнѣ отношеніє са 3 множећи, быва $З:з = 2КД:3КД$, и исто отношеніє чрезъ $КД$ дѣлећи, быва $З:з = 2:3$.

Примѣчаніє. По изложенымъ у науцы тѣла основима, могу се изнаћи како површине и запремине правилны тѣла и оны, о коима досадъ спомена nie было. Опредѣленie површина, као полигона правилны, съ коима се ова тѣла покривају, никаковой теготи nie подложно, а запремине нњове могу се као запремине пирамиде изнаћи, или ако су неправилна, тако се на части раздѣлити, да се ко овима овде изложенима тѣлама причислити, и тако прорачунати могу.

IV. ошилякъ (conus).

308.

⁂ Изясненie. Кадъ представимо себи, да се ошилякъ површиномъ некомъ, скрозъ пролазећомъ сѣче, сѣченѣ, одтудъ произлазеће, вообште зовесе *сѣченie ошилька* (sectio coni), тако да сѣченie ошилька ништа друго nie него површина, кою една или друга поменутымъ начиномъ одсѣчена ошилька часть излаже. Но найвыше у оваковомъ сѣченю само се лінія крива, одсѣчену ошилька површину заключавајућа, у смотренie узима, и именомъ сѣченя ошильногъ назначуесе. По разномъ сѣчеће површине положенію у смотренію ошилька сѣченогъ стране, основа, или *осе*, то есть лініе отвѣсне изъ вр̓а ошилька правогъ на средню основа точку спуштене, коя се у ошильку правомъ са нѣговомъ высиномъ слаже, сѣченѣ представля намъ *еллипсу*, *параболу*, *иперболу*.

Примѣчанie. Постанѣ ошилька, како се нѣгова површина и нѣгова сталность изнаћи може, изъ узрока тога што є ошилякъ округла пирамида, све што се у овомъ смотреню казати могло, у заглавію подъ пирамидомъ изложено є. Наше є намѣренѣ овде оне криве лініє, коє се сѣченіємъ ошилька рађаю, изложити, и она ньюова свойства представити, коя се у физики изискую.

309.

Изясненіє. *Еллипсісъ* (ἔλλειψις) зовесе оно сѣченіє ошилька, коє се рађа, кадъ површина, коіомъ се ошилякъ сѣћи представля, како на осу, тако и на обе стране ошилька коссо пада, као у фіг. 134′. *КЛМН* или у фіг. 137. *АЕБДА.* ф. 134′. 137.

310.

Изяснен. *Парабола* (παραβολη) зовесе сѣченіє ошилька, коє се рађа, кадъ є површина сѣчеђа са страномъ ошилька равнотекуђа, (као што є *БАВ* фіг. 135. или *АБВ* фіг. 138.). Она права лінія *БВ*, кою ово сѣченіє на основу ошилька правогъ сачинява, зовесе *основъ* параболе. ф. 135. ф. 138.

311.

Изяснен. *Иперболa* (ὑπερβολη) зовесе сѣченіє ошилька, коє се рађа, кадъ є површина сѣчеђа равнотекуђа са осомъ ошилька, као што є *ІГХ* фіг. 136. Но за придобыти право понятіє иперболе, треба да представимо себи два ошиль- ф. 136.

ка, кои се са своимъ ошиляма сучеляваю и до-
ф. 136. дираю, као у фіг. 136. и кадъ су они у овомъ положенію, онда да вообразимо себи, да се они површиномъ некомъ *МН* на обшту супротны ошиляка осу *ую* равнотекуће сѣку, тако да се две иперболе себи супротне указую као *ХГІ* и *хгі*.

Примѣчаніе. Ако површина сѣчећа прелази преко ошиля ошилька правогъ на основъ отвѣсно, сѣченіе є триугалъ; ако є површина сѣчећа равнотекућа на основъ ошилька правогъ, изродићесе таковымъ сѣченіемъ кругъ.

312.

Изяснен. Точка она сѣченія ошильчкова, у коіой є найвећа сѣченія кривина, *ошилѣ* нѣгово зовесе.

ф. 137. Слѣд. Но пошто еллипсісъ фіг. 137., и
ф. 136. удвосна ипербола фіг. 136. у две точке *А,Б*, и
ф. 138. *Г,г*, а парабола само у єдной *А* фіг. 138. найвећу кривину има, слѣдує, да еллипсисъ и ипербола има два ошиля *А* и *Б*, *Г* и *г*, а парабола само єдно.

313.

ф. 137. Изяснен. Лінія права *АБ* еллипсе фіг. 137.
ф. 136. и иперболе фіг. 136. *Гг* ошиля союжавајућа, зовесе нїова оса *попречна* или *главна*, или *већа*, одъ кое точка средня *С* средоточіє зовесе: лі-

нія пакъ на главну осу отвѣсна *ЕД*, преко средоточія прелазећа, оса *манл*, и равна е среднѣ сразмѣрной међу осомъ већомъ и параметромъ (о коме ћемо далѣ изясненіе дати).

314.

Изясн. *Оса параболе* зовесе лінія права *Ах* фіг. 138. 135. изъ ошиля нѣногъ *А*, на основъ *БВ* спуштена отвѣсна. ф. 138. ф. 135.

315.

Изясн. Свака права као *ДЕ, ГХ* фіг. 138. на осу главну отвѣсна, са обе стране у кривини сѣченія окончавајућасе, зовесе *редовна:* половина нѣна одъ кривине до осе узета, зовесе *полуредовна:* одсѣчіе пакъ осе, међу криве ошилѣмъ и редовномъ, или полуредовномъ, зовесе *одсѣчица.* Тако е редовне *ХГ* соотвѣтствујућа одсѣчица *АІ:* полуредовне *ЛК* одсѣчица е *АК*, и проч. ф. 138.

Примѣч. О одсѣчицама редовны' у еллипси соотвѣтствујућима, као и о редовнима, и о одсѣчицама осе манѣ, далѣ свойства овде наводити противъ намѣреня е нашегъ.

316.

Изяснен. Она параболе редовна *Пп* фіг. 138., коя е учетворена одсѣчице свое, *параметеръ параболе* зовесе: а точка она *О* осе, у ф. 138.

коіой параметеръ осу сѣче, параболе *огнѣточіе* зовесе.

317.

Слѣд. Кадъ се четврта параметра часть изъ ошиля параболе на осу пренесе, определиѣесе параболе огнѣточіе.

318.

Изясн. *Огнѣточіе* еллипсе зовесе ова осе
ф. 137. главне *АБ* (фіг. 137.) точка (као што е *О* и *о*), коя одъ обе крайнѣ осе манѣ *ЕД* точке *Е* и *Д* одстояніемъ (*ОД* и *од*) равнымъ полуоси главной *АС* одстои. Редовна преко огнѣточія *о* пролазеѣа *Пп* *параметеръ* е еллипсе.

319.

Слѣдства. 1. Пошто се еллипса и ипербола стедоточіемъ на две равне части дѣли, точка нѣка веѣе осе съ обе стране одъ крайнѣы манѣ осе точкій отстояніемъ, кое е равно полуоси веѣой, отстояти мора. Одтудъ еллипса и ипербола два има огнѣточія као *О* и *о*, и два параметра.

2. Кадъ се еллипсе главна оса *АБ* изъ обе крайнѣ осе манѣ точке *Д* отстояніемъ *ДО* или *До*, кое е равно полуоси веѣой *АС*, съ обе стране пресѣче, определиѣесе два огнѣточія *О* и *о*.

320.

Изясн. *Огнѣточіе* иперболе зовесе она осе веће продужене *АБ* фіг. 139. точка *О* или *о*, коя од средоточія *С* отстои отстояніемъ *СО* равнымъ ошилю *А* отстоянію *АД* одъ обе крайнѣ осе манѣ *ЕД* точке *Д*; а *параметеръ* зовесе она редовна, коя преко огнѣточія прелази *хю*. Слѣдователно ипербола као и еллипсісъ има два огнѣточія *О* и *о*, и два параметра. ф. 139.

321.

Наставл. *Еллипса у себе саму повраћасе.*

Доказат. Єръ се она рађа сѣченіемъ ошилька, кое сѣченіе обе стране ошилька прелази. (§ 309.).

322.

Наставл. *Еллипса сѣчесе свакомъ осомъ своіомъ на две равне части.*

Доказат. Єръ ако се еллипса по новученой оси пресомити, части ће се нѣне сложити и поклопити, али § 11. ч. 10.; дакле. Зато

323.

Слѣдства. 1. Еллипса дѣлисе чрезъ свое две осе на четиръ равне части.

2. Редовне еллипсе, одъ ошиля равноотстоѣне, и тако кривине супротне, кое оне редовне опредѣлявају, равне су.

324.

Изяснен. Отстоянiе средоточiя одъ огнѣточiя еллипсе зовесе *вансредоточiе* еллипсе, као
ф. 137. што е *Co* фiг. 137.

325.

Наставл. *Вансредоточiе еллипсе со тымъ е веће, што е маня оса маня у смотренiю попречне.*

Доказат. Еръ огнѣточiя со тымъ се већма одъ средоточiя удалявају.

326.

Слѣд. Еллипсе одвећъ стинѣне весма су вансредоточне. Еръ со тымъ маню имају осу у смотренiю главне или попречне осе.

327.

Изяснев. Ако се движимо движе у кругу
ф. 137. еллиптическомъ фiг. 137. око ма кога огнѣточiя н. п. око *O*, ошилѣ еллипсе *Б*, ономъ огнѣточiю найближе, зовесе *перихелiонъ*, а оно далѣ или удалѣнiе ошиля *A* зовесе *афелiонъ*, отстоянiе оногъ движимогъ одъ огнѣточiя (као средоточiя

сила, коима се оно движе), или права, движимо оно са огнѣточіемъ, око кога се оно движе, союжавающа, зовесе *зрачацъ покретный*. Тако, ако є движимо у *А*, зрачацъ покретный є *АО*; ако движимо дође у *Д*, зрачацъ є покретный *ДО*; а ако се движимо налази у *Б*, зрачацъ є покретный *БО*, и проч.

328

Наставл. *Ако се движимо окреће у елипси око ма кога огнѣточія О, движимо оно има ће одъ нѣга отстояніе* 1) *у перихеліону найманѣ БО:* 2) *у афеліону найвеће АО:* 3) *у осе манѣ* **ЕД** *окрайнымъ точкама* **Е** *и Д среднѣ соразмѣрно.*

Доказат. 1) *БО* зрачацъ є найманьій: 2) *АО* є найвећій, као што є очевидно: 3) *ДО* є среднѣ аритметическо соразмѣранъ међу отстояніяма *БО* и *АО*; єръ є *ДО* (као = полуоси већой) полусумма одъ *БО* + *АО* (или одъ *АБ*), али полусумма два количества, то є међу нъима среднѣ соразмѣрна; дакле.

ГЛАВА ДРУГА.

О МЕЂУСОБНЫМЪ ТѢЛА' ОТНОШЕНІЯМА.

329.

Наставлен. *Призмата и ваљци имаюсе у отношенію удвоеномъ основица и высина.*

Доказат. Запремину єднога да назначимо са $З$; а другога са $з$, высина єднога да буде $В$, а другога $в$, основице $О$ и $о$, быће

$$З = ОВ,$$

$$\text{а} \quad з = ов \quad (\S\ 289.).$$

$$\text{одтудъ } З : з = ОВ : ов,$$

али отношеніе ово $ОВ : ов$ сложено є отношеніе изъ $О : о = В : в$; дакле.

330.

Слѣдства. 1. Ако є $В = в$, быће $З : з = О : о$ (т. є. прећашнѣ соразмѣрности друго отношеніе чрезъ $В$ и $в$ дѣлећи); ако ли є $О = о$, быће

$$З : з = В : в,$$

то єсть, овакова тѣла имаюћа равне высине, имаюсе као основи, ако пакъ имаю равне основе, имаюсе као высине.

7. Ако є $З = з$, бýва $OB = ов$, и одтудъ

$B : в = о : O$, и обратно ако се

$B : в = о : O$,

бýва $OB = ов$,

то есть, ако су такова два тѣла међусобно равна, ньіове высине имаюсе обратно са основима соразмѣрно, и обратно.

331.

Наставленіє. *Призмата подобна I и і* фіг. 124. *имаюсе у отношенію утроєномъ сваки* ф. 124. *страна соотвѣтственны, као* $БВ^2 : бв^2$.

Доказател. По § 329. содржанію и доказателству

$I : і = АБ \times БВД : аб \times бвд$,

или пошто є $АБ : аб = БВ : бв$,

и $I : і = БВ \times БВД : бв \times бвд$;

али $БВД : бвд = БВ^2 : бв^2$ (§ 209.);

дакле $I : і = БВ \times БВ^2 : бв \times бв^2$,

или $I : і = БВ^3 : бв^3$.

332.

Слѣдства 1. Исто тако имаюсе и пирамиде подобне.

2. Ваљци подобни имаюсе међусобно као и ошиљци подобни у отношенію утроєномъ (или као кубуси) полупречника ньіовы (окружны) основа производећи.

333.

Наставленіе. *Сфере имаюсе у отношенію утровномъ (или као кубуси) полупречника или пречника.*

Доказат. Да назначимо запремину єдне сфере $= З$, а друге $= з$, быће

$$З : з = \tfrac{2}{3} КД : \tfrac{2}{3} кд \text{ (§ 307. ч. 1.)},$$

$$З : з = КД : кд \text{ (Алгебра § 126. VI.)},$$

то єсть, у отношенію сложеномъ изъ

$$К : к \text{ и } Д : д,$$

$$\text{али } К : к = Д^2 : д^2 \text{ (§ 210. ч. 4.)};$$

$$\text{дакле } З : з = Д \times Д^2 : д \times д^2,$$

$$\text{или } З : з = Д^3 : д^3,$$

или на мѣсто пречника постављаюћи зрачце,

$$З : з = Р^3 : р^3.$$

ТАБЛИЦА

ДѢЙСТВІЯ УГЛОВА

одъ 1 до 90 степеній осимъ поєдини десетъ мінута.

Степени.	Минута.	Нѣдриште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
0		0	0	0	0
	10	290,89	290,89	7.4637255	7.4637273
	20	581,77	581,77	7.7647537	7,7647610
	30	872,65	872,65	7.9408419	7.9408584
	40	1163,53	1163,61	8.0657763	8.0658057
	50	1454,39	1454.54	8,1626808	8,1627267
1		1745,24	1745.51	8,2418553	8,2419215
	10	2036,08	2036,50	8,3087941	8,3088842
	20	2326,90	3327,53	8,3667769	8,3668945
	30	2617,69	2618,59	8,4179190	8,4180679
	40	2908,47	2909,70	8,4636649	8,4638486
	50	3199,22	3200,86	8,5050447	8,5052671
2		3489,95	3492,08	8,5428192	8,5430838
	10	3780,65	3783,35	8.5775660	8.5778766
	20	4071,31	4074,69	9,6097341	8,6100943
	30	4361,94	4366,09	8,6396796	8,6400931
	40	4652,53	4657,57	8,6676893	8,6681598
	50	4943,08	4949,13	8,6938980	8,6945292
3		5233,60	5240,78	8,7188002	8,7193958
	10	5524,06	5532,51	8,7422586	8,7429222
	20	5814,48	5824,34	8,7645111	8,7652465
	30	6104,85	6116,26	8,7856753	8,7864861
	40	6395,17	6408,29	8,8058523	8,8067422
	50	6685,44	6700,43	8,8251299	8,8261026
4		6975,65	6992,68	8,8435845	8,8446437
	10	7265,80	7285,05	8,8612833	8,8624327
	20	7555,89	7577,55	8,8782854	8,8795286
	30	7845,91	7870,17	8,8946433	8,8959842
	40	8135,87	8162,93	8,9104039	8,9118460
	50	8425,76	8455,83	8,9256089	8,9271560
5		8715,57	8748,87	8,9402960	8,9419518
	10	9005,32	9042,06	8,9544991	8,9562672
	20	9294,99	9335,40	8,9682487	8,9701330
	30	9584,58	9628,90	8,9815729	8,9835769
	40	9874,08	9922,57	8,9944968	8,9966243
	50	10163,51	10216,41	9,0070436	9,0092984
6		10452,85.	10510,42	9,0192346	9,0216202
	10	10742,10	10804,62	9,0310890	9,0336093
	20	11031,26	11098,99	9,0426249	9,0452836
	30	11320,32	11393,56	9,0538588	9,0566595
	40	11609,29	11688,31	9,0648057	9,0677522
	50	11898,16	11983,28	9,0754799	9,0785760

Степени.	Минута.	Нѣдриште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
89	60	100000,00	безконечн.	10,0000000	безконечнъ.
	50	99999.58	34377371,00	9.9999982	12.5362727
	40	99998.30	17188540,00	9.9999927	12,2352390
	30	99996.19	11458865,00	9.9999835	12,0591416
	20	99993.23	8593979,10	9.9999706	11.9341943
	10	99989.42	6875008.70	9.9999542	11,8372733
88	60	99984.77	5728996.56	9,9999338	11.7580785
	50	99979.27	4910388.06	9,9999100	11,6911158
	40	99972,92	4296407.73	9,9999824	11,6331055
	30	99965,73	3818845,93	9,9998512	11,5819321
	20	99957,69	3436777,09	5,9998162	11,5341514
	10	99948,81	3124157.67	9.9997776	11,4947329
87	60	99939,08	2863625,33	9,9997354	11,4569162
	50	99928,51	2643159,96	9.9996894	11.4221234
	40	99917.09	2454175.78	9,9996398	11,3899057
	30	99904,82	2290376,55	9,9995865	11,3599059
	20	99891.71	2147040.10	9.9995297	11,3318402
	10	99877.75	2029555,35	9,9994688	11,3054708
86	60	99862,95	1908113,67	9,9994044	11,2806042
	50	99847,31	1807497,74	9,9993364	11,2570778
	40	99830.81	1716933,69	9,9992646	11,2347535
	30	99813,48	1634985,55	9,9991892	11,2135139
	20	99795,29	1560478,41	9,9991101	11,1932578
	10	99776,27	1492441,70	9,9990272	11,1738074
85	60	99756,40	1430066.63	9,9989408	11,1553563
	50	99735,69	1372673.79	9,9988506	11,1375673
	40	99714,13	1319688,30	9,9987567	11,1204714
	30	99691,73	1270620,47	0,9986491	11,1040158
	20	99668,49	1225050,55	9,9985579	11,0881540
	10	99644,40	1182616,67	9,9984529	11,0728440
84	60	99619,47	1143005,23	9,9983442	11,0580482
	50	99593,60	1105943,10	9,9982318	11,0437328
	40	99567,08	1071191,26	9,9981158	11,0293670
	30	99539,62	1038539,71	9,9979960	11,0164231
	20	99511,32	1007803,11	9,9978725	11,0033757
	10	99442,17	978817,32	9,9977453	10,9907016
83	60	99452,18	951436,45	9,9976143	10,9783798
	50	99421,36	925530,35	9,9974797	10,9663907
	40	99489,69	900982,61	9,9993414	10,9547164
	30	99357,18	877688,74	9,9971993	10,9433405
	20	99323,83	855554,68	9,9970535	10,9322478
	10	99289,64	834495,57	9,9969040	10,9214240

Степени.	Минута.	Нѣдрите.	Дирка.	Логаритамъ нѣдрища.	Логаритамъ дирке.
7		12186.93	12278,46	9,0858945	9,0891438
	10	12475,60	12573,84	9,0960615	9,0994678
	20	12764.16	12869,43	9,1059924	9,1095594
	30	13052,62	13165,25	9,1156977	9,1194291
	40	13340,96	13461.29	9,1251872	9,1290868
	50	13629,19	13757.57	9,1344702	9,1385417
8		13917,31	14054,08	9,1435553	9,1478025
	10	14205,31	14250,84	9,1524507	9,1568773
	20	14493,19	14647,84	9,1611639	9,1657737
	30	14780,94	14945,10	6,1697021	9,1744988
	40	15068,57	15242,61	9,1780721	9,1830595
	50	15356,07	15540,40	9,1862802	9,1914621
9		15643,45	15838,44	9,1943324	9,1997125
	10	15930,69	16136,77	9,2022345	9,2078165
	20	16217.79	16434,37	9,2099917	9,2157795
	30	16504.76	16734,26	9,2176092	9,2236005
	40	16791,59	17033,44	9,2250918	9,2313024
	50	17078,28	17332,92	9,2324440	9,2383717
10		17364,82	17632,70	9,2396702	9,2463188
	10	17651,21	17932,78	9,2467746	9,2536477
	20	17937,46	18233,18	9,2537609	9,2608625
	30	18223,55	18533,90	9,2606330	9,2679669
	40	18509.49	18334,95	9,2673945	9,2749644
	50	18795,26	19136,32	9,2740487	9,2818585
11		19080,90	19438,03	9,2805988	9,2886523
	10	19366,36	19740,08	9,2870480	9,2953489
	20	19651,66	20042,48	9,2933993	9,3019514
	30	19936,79	20345,23	9,2996553	9,3084626
	40	20221,76	20648,34	9,3058189	9,3148851
	50	20506,55	20951,81	9,3118926	9,3212216
12		20791,17	21255,65	9,3178789	9,3274745
	10	21075,61	21559,88	9,3237802	9,3336463
	20	21359,88	21864,48	9,3295988	9,3397391
	30	21643,96	22169,47	9,3353368	9,3457552
	40	21927,86	22474,85	9,3409963	9,3516968
	50	22211,58	22780,63	9,3455794	9,3575658
13		22495,11	23086,82	9,3520880	9,3633641
	10	22778,44	23393,42	9,3575240	9,3690937
	20	23061,59	23700,44	9,3628892	9,3747563
	30	23344,54	24007,87	9,3681853	9,3803537
	40	23627,29	24315,75	9,3734139	9,3858876
	50	23909,84	[illegible],05	9,3785767	9,3913595

Степени.	Минута.	Нѣдри-ште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
82	60	99254,62	814434,64	9,9967507	10,9108562
	50	99218,74	795302,24	9,9965937	10,9005322
	40	99182,03	777035,06	9,9964330	10,8904406
	30	99144,49	759575,41	9,9962686	10,8805709
	20	99106,09	742870,64	9,9961004	10,8709132
	10	99066,87	726872,55	9,9959284	10,8614583
81	60	99026,80	711536,97	9,9957528	10,8521975
	50	98985,90	696823,35	9,9955734	10,8431227
	40	98944,16	682694,37	9,9953902	10,8342263
	30	98901,58	669115,62	9,9952033	10,8255012
	20	98858,17	656055,38	9,9950126	10,8169405
	10	98813,92	643484,28	9,9948181	10,8085379
80	60	98763,83	631375,15	9,9946199	10,8002875
	50	98722,91	619702,79	9,9944180	10,7921835
	40	98676,15	608443,81	9,9942122	10,7842205
	30	98628,56	597576,44	9,9940027	10,7763935
	20	98580,12	587080,42	9,9937894	10,7686976
	10	98530,87	576936,88	9,9935723	10,7611283
79	60	98480,77	567128,18	9,9933515	10,7536812
	50	98429,85	557637,86	9,9931268	10,7463523
	40	98378,08	548450,52	9,9928984	10,7391375
	30	98325,49	539551,72	9,9926661	10,7320331
	20	98272,06	530927,93	9,9924301	10,7250356
	10	98217,81	522566,47	9,9921905	10,7181415
78	60	98162,71	514455,40	9,9919466	10,7113477
	50	98106,80	506583,52	9,9916991	10,7046511
	40	98050,05	498940,27	9,9914478	10,6986486
	30	97992,47	491515,70	6,9911927	10,6915374
	20	97934,06	484300,45	9,9909338	10,6851149
	10	97874,83	477585,67	9,9906710	10,6787784
77	60	97814,76	474063,01	9,9904044	10,6725255
	50	97753,86	463824,57	9,9901339	10,6663537
	40	97692,15	457362,87	9,9898597	10,6602609
	30	97629,60	451070,85	9,9895815	10,6542448
	20	97566,23	444941,81	9,9892995	10,6483032
	10	97502,03	438969,40	9,9890137	10,6424342
76	60	97437,01	433147,59	9,9887239	10,6366359
	50	97371,16	427470,66	9,9884303	10,6309063
	40	97304,48	421933,18	9,9881329	10,6252437
	30	97236,99	416529,96	9,9878315	10,6196463
	20	97168,67	411256,14	9,9875263	10,6141124
	01	97099,54	406107,00	9,9872171	10,6086405

Степени.	Минута.	Нѣдрище.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
14		24192.19	24932,80	9,3836752	9,3967711
	10	24474.33	25242,00	9.3887109	9.4021237
	20	24756.27	25551.65	9.3936852	9.4074189
	30	25038,00	25861.76	9,3985996	9.4126581
	40	25319.52	26172.34	9,4034554	9,4178425
	50	25600,82	26483,39	9,4082539	9.4229735
15		25881.90	26794,92	9,4129962	9.4280525
	10	26162.77	27106.93	9,4176837	9,4330804
	20	26443.42	27419,44	9,4223176	9.4380587
	30	26723,84	27732,45	9,4268988	9.4429883
	40	27004.03	28045.97	9,4314286	9.4478704
	50	27284,00	28359,99	9.4359080	9,4527061
16		27563.74	28674,54	9,4403381	9,4574964
	10	27843.24	28989,61	9.4447197	9,4622423
	20	28122.51	29305.21	9.4490540	9,4669448
	30	28401.53	29621.35	9,4533418	9,4716048
	40	28680.32	29938.03	9,4575840	9.4762233
	50	28958,87	30255.27	9,4617816	9,4808011
17		29237,17	30573,07	9.4659353	9,4853390
	10	29515,22	30891,43	9.4700461	9.4898380
	20	29793.03	31210,36	9,4741146	9,4942988
	30	30070,58	31529,88	9,4781418	9,4987223
	40	30347,88	31849,98	9.4821283	9,5031092
	50	30624.92	32170,67	9.4860749	9,5074602
18		30901.70	32491,97	9,4899824	9,5117760
	10	31178.22	32813,87	9,4938513	9,5160572
	20	31454.48	33136,39	9,4976824	9,5203052
	30	31730.47	33459,53	9.5014764	9.5245199
	40	32006.19	33783.30	9,5052339	9,5257021
	50	32281.64	34107,71	9,5089556	9,5328326
19		32556.82	34432.76	9,5126419	9,5269719
	10	32831,72	34758.46	9,5162936	9,5410606
	20	33106.34	35084.83	9.5199112	9.5451193
	30	33380,69	35411.86	9.5234953	9,5491487
	40	33654.75	35739,56	9,5270463	9,5531492
	50	33928,53	36067,95	9.5305650	9,5571214
20		34202,02	36397,02	9,5340517	9,5619659
	10	34475,22	36726,80	9,5375069	9.5649831
	20	34748.13	37057,28	9,5409314	9,5688735
	30	35020,74	37388,47	9,5443253	9,5527377
	40	35293.06	37720,38	9,5476893	9.5765761
	50	35565,08	38053,03	9,5510237	9,5803892

Степени.	Минута.	Нѣдрите.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
75	60	97029,57	401078,09	9,9869041	10,6032289
	50	96958,79	396165,18	9,6865872	10,5978763
	40	96887,18	391364,20	9,9862663	10,5925811
	30	96814,76	386671,31	9,9859416	10,5873419
	20	96741,52	382082,81	9,9856129	10,5821575
	10	96667,46	377595,19	9,9852803	10,5770265
74	60	96592,58	373205,08	9,9849438	10,5719475
	50	96516,88	368909,27	9,9846033	10,5669196
	40	96440,37	364704,67	9,9842589	10,5619417
	30	96363,05	360588,35	9,9839105	10,5570113
	20	96284,90	356557,49	9,9835582	10,5521296
	10	96205,94	352609,38	9,9832019	10,5472939
73	60	96126,47	348741,44	9,9828416	10,5425036
	50	96045,58	344951,20	9,9824774	10,5377577
	40	95964,18	341236,26	9,9821092	10,5330552
	30	95881,97	337594,34	9,9817370	10,5282952
	20	95798,95	334023,26	9,9813608	10,5237767
	10	95715,12	330520,91	9,9809805	10,5191989
72	60	95630,48	327085,26	9,9805963	10,5146610
	50	95545,02	323714,38	9,9802081	10,5101620
	40	95458,76	320406,38	9,9798158	10,5057012
	20	95371,69	317159,48	9,9794195	10,5012777
	20	95283,82	313971,94	9,9790192	10,4968908
	10	95195,14	310842,10	9,9786148	10,4925398
71	60	95105,65	307768,35	9,9782063	10,4882240
	50	95015,36	304749,15	9,9777938	10,4839425
	40	94924,26	301783,01	9,9773772	10,4796948
	30	94832,36	298868,50	9,9769566	10,4754801
	20	94739,66	296004,22	9,9765318	10,4712979
	10	94646,16	293188,85	9,6761030	10,4671474
70	60	94551,85	290421,09	9,9756701	10,4630281
	50	94456,75	287699,70	9,9752330	10,4589394
	40	94360,85	285023,49	9,9747918	10,4548807
	30	94264,15	282391,29	9,9743466	10,4503513
	20	94166,65	279801,98	9,9738971	10,4468508
	10	94068,35	277254,48	9,9734435	10,4428786
69	60	93969,26	274747,47	9,9729858	10,4389341
	50	93869,37	272280,75	9,9725239	10,4350169
	40	93768,69	269852,54	9,9720579	10,4311265
	30	93667,22	267462,15	9,9715876	10,4272623
	20	93564,95	265108,67	9,9711132	10,4234239
	10	93461,89	262791,21	9,9706346	10,4196108

Степени.	Минута.	Нѣдрište.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
21		35836,79	38386,40	9,5543292	9,5841774
	10	36108,21	38720,53	9,5576060	9,5879413
	20	36379,32	39055,41	9,5608546	9,5916812
	30	36650,13	39391,05	9,5640754	9,5953975
	40	36920,62	39727,46	9,5672689	9,5990903
	50	37190,80	40064,65	9,5704355	9,6027613
22		37460,66	40402,62	9,5735754	9,6064096
	10	37730,21	40741,39	9,5766892	9,6100359
	20	37999,44	41080,97	9,5797772	9,6133407
	30	38268,34	41421,36	9,5828397	9,6172243
	40	38536,93	41762,57	9,5858771	9,6207872
	50	38805,18	42104,60	9,5888897	9,6243296
23		39073,11	42447,49	9,5918780	9,6278519
	10	39340,71	42791,20	9,5948422	9,6313545
	20	39607,98	43135,79	9,5977827	9,6348378
	30	39874,91	43481,24	9,6006997	9,6383019
	40	40141,50	43827,56	9,6035936	9,6417473
	50	40407,75	44174,76	9,6064047	9,6451743
24		40973,66	44522,87	9,6093133	9,6485831
	10	40939,23	44871,87	9,6121397	9,6519742
	20	41204,46	45221,79	9,6149441	9,6553477
	30	41469,32	45572,64	9,6177270	9,6587041
	40	41733,85	45924,39	9,6204884	9,6620434
	50	41998,01	46277,09	9,6232287	9,6653662
25		42161,83	46630,77	9,6259483	9,6686725
	10	42525,28	46985,39	9,6289472	9,6719628
	20	42788,38	47340,98	9,6313258	9,6752372
	30	43051,11	47697,55	9,6339844	9,6784961
	40	43313,48	48055,12	9,6366231	9,6817396
	50	43575,48	48413,68	9,6392420	9,6849681
26		43837,12	48773,26	9,6408420	9,6881818
	10	44098,38	49133,86	9,6444226	9,6913809
	20	44359,27	49495,49	9,6469844	9,6945656
	30	44619,78	49858,16	9,6495274	9,6977363
	40	44879,92	50221,89	9,6520521	9,7008930
	50	45139,68	50586,68	9,6545584	9,7040362
27		45399,05	50952,54	9,7570468	9,7071659
	10	45658,04	51319,50	9,6595173	9,7102824
	20	45916,64	51687,55	9,6619701	9,7133859
	30	46174,86	52056,70	9,6644056	9,7164767
	40	46432,69	52426,98	9,6668238	9,7195549
	50	46690,12	52798,39	9,6692250	9,7226207

Степени.	Минута.	Пѣдрище.	Дирка.	Логаритамъ пѣдришта.	Логаритамъ дирке.
68	60	93358,04	260508,91	9,9701517	10,4158226
	50	93253,40	258260,94	9,9696647	10,4120587
	40	93147,97	256046,49	9,9691734	10,4083188
	30	93041,75	253864,79	9,9686779	10,4046025
	20	92934,75	251715,07	9,9681781	10,4009092
	10	92826,96	249596,61	9,9676741	10,3972387
67	60	92718,39	247508,69	9,9671659	10,3935904
	50	92609,03	245450,61	9,9666533	10,3899641
	40	92498,88	243421,72	9,9661365	10,3863593
	30	92387,95	241421,36	9,9656153	10,3827757
	20	92276,24	239448,89	9,9650899	10,3792122
	10	92163,75	237503,72	9,9645602	10,3756704
66	60	92050,49	235585,24	9,9640261	10,3721481
	50	91936,44	233692,87	9,9634877	10,3686455
	40	91821,61	231826,06	9,9629449	10,3651622
	30	91706,01	229984,25	9,9623978	10,3616981
	20	91589,63	228166,93	9,9618463	10,3582527
	10	91472,47	226373,57	9,9612904	10,3548257
65	60	91354,54	224603,68	9,9607302	10,3514169
	50	91235,84	222856,76	9,9601655	10,3480258
	40	91116,37	221132,34	9,9595964	10,3446523
	30	90996,13	219429,97	9,9590229	10,3412960
	20	90875,11	217749,20	9,9584450	10,3379566
	10	90753,33	216089,58	9,9578626	10,3346338
64	60	90630,78	214450,69	9,9572757	10,3313275
	50	90507,46	212832,13	9,9566844	10,3280372
	40	90383,38	211233,48	9,9560886	10,3247628
	30	90258,53	209654,36	9,9554882	10,3215039
	20	90132,91	208094,38	9,9548834	10,3182604
	10	90006,54	206553,18	9,9542741	10,3150319
63	60	89879,40	205030,38	9,9536602	10,3118182
	50	89751,51	203525,65	9,9530418	10,3086191
	40	89622,85	201038,62	9,9524188	10,3054344
	30	89493,43	200568,97	9,9517912	10,3022637
	20	89363,27	199116,37	9,9511590	10,2991070
	10	89232,33	197680,50	9,9505223	10,2959638
62	60	89106,65	196261,05	9,9498809	10,2928341
	50	88968,21	194857,71	9,9492349	10,2897176
	40	88835,02	193470,20	9,9485842	10,2866141
	30	88701,08	192098,21	9,9479289	10,2835233
	20	88566,39	190741,47	9,9472689	10,2804451
	10	88430,95	189399,71	9,9466043	10,2773793

Степени. Минута.	Нѣдри-ште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
28	46947.16	53170.94	9,6716093	9,7256744
10	47203.80	53544,65	9.9739769	9,7287161
20	47460.04	53919.52	9.6763281	9,7317460
30	47715.88	54295,57	9.6786629	9,7347644
40	47971.31	54672.81	9.6809816	9,7377714
50	48226.34	55051.25	9.6832843	9,7407672
29	48480.96	55430.90	9,6855712	3,7437520
10	48735.17	55811.79	9.6878425	9,7467259
20	48988.97	56193.91	9.6900983	9.7496892
30	49242.36	56577.28	9.6923388	9.7526420
40	49495.33	56961.91	9.6945642	9.7555846
50	49747.87	57347.83	9.6967745	9.7585170
30	500000.0	57735.03	9,6989700	9.7614394
10	50251.70	58123.53	9,7011508	9.7643520
20	50502.99	58513.35	9.7033170	9.7672550
30	50753.84	58904.50	9,7054689	9.7701485
40	51004.26	59296.99	9.7076064	9.7730327
50	51254.25	59690.84	9,7097299	9.7759077
31	51503.81	60086.06	9.7118393	9.7787737
10	51752,93	60482.66	9.7139349	9.7816309
20	52001,61	60880.67	9.7160168	9.7844794
30	52249.86	61280.08	9.7180851	9,7873193
40	52497.66	61680.92	9.7201399	9,7901508
50	52745.02	62083.20	9.7221814	9.7929741
32	52991.93	62486.94	9.7242097	9.7957892
10	53238.39	62892.15	9.7262249	9.7985964
20	53484.40	63298.83	9.7282271	9,8013957
30	53729.96	63707.03	9,7302165	9,8041873
40	53975.07	64116.73	9,7321932	9.8069714
50	54219.71	64527.97	9.7341572	9,8097480
33	54463.90	64940,76	9.7361088	9,8125174
10	54707.63	65355.11	9.7380479	9,8152795
20	54050.90	65771.03	9.7399748	9,8180347
30	55193.70	66188.56	9.7418895	9,8207829
40	55436.03	66607.69	9.7437921	9,8235244
50	55677.90	67028.45	9,7456828	9,8262592
34	55915.29	67450.85	9,7475617	9,8289874
10	56160.21	67874.92	9.7494287	9,8317093
20	56400.65	68300,66	9,7512842	9,8344249
30	56640.62	68728,10	9,7531280	9,8371349
40	56880.11	69157.24	9,7549604	9,8398377
50	57119,12	69588.13	9,7567815	9,8425351

Степени.	Минута.	Нѣдриште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
61	60	88294,76	188072,65	9,9459349	10,2743256
	50	88157.82	186760.03	9,9452609	10,2712839
	40	88020,14	185461,59	9,9445821	10,2682540
	30	87881.71	184177.09	9,9438985	10,2652356
	20	87742.54	182906.28	9,9432102	10,2622286
	10	87602.62	181648.92	9,9425171	10,2692328
60	60	87461.97	180404.78	9,9418193	10.2562480
	50	87320,58	174173,73	9,9411166	10.2532741
	40	87178.44	177955.24	9,9404091	10.2503108
	30	87035.57	176749.70	9,9396968	10.2473580
	20	86891.69	175555.90	9,9389796	10.2444154
	10	86747.62	174374.53	9,9382576	10.2414830
59	60	86602.54	173205.08	9,9375306	10.2385606
	50	86456.73	172047.36	9,9367988	10.2356480
	40	86310,12	170901.16	9,9360621	10.2327450
	30	86162,92	169766.31	9,9353204	10.2298515
	20	86014,91	168642.61	9,9345738	10.2269673
	10	85866.18	167529,88	9,9338222	10,2240923
58	60	85716.73	166427,95	9,9330656	10.2212263
	50	85566.55	165336.63	9,9323040	10.2183691
	40	85415.64	164255.76	9,9315374	10.2155206
	30	85264.02	163185.17	9,9307658	10.2126807
	20	85111,66	162124.69	9,9299891	10.2098492
	10	84958,60	161074.17	9,9292073	10,2070259
57	60	84804.81	160033.45	9,9284205	10,2042108
	50	84650,30	159002,38	9,9276285	10.2014036
	40	84495,08	157980,79	9,9268314	10,1983248
	30	84339,14	156968.56	9,9260292	10,1958127
	20	84182,49	155965.52	9,9252218	10,1930286
	10	84025,13	154971,55	9,9244092	10,1902520
56	60	83867,06	153986.50	9,9235914	10,1874826
	50	83708,27	153010,23	9,9227684	10,1847205
	40	83548,78	152042.61	9,9219401	10,1819653
	30	83388,58	151083,52	9,9211066	10,1792171
	20	83227.68	150132.82	9,9202678	10.1764756
	10	83066,07	149190,38	9,9194237	10.1737408
55	60	82903,76	148256,10	9,9185742	10,1710126
	50	82740,74	147329,83	9,9177194	10,1682907
	40	82577,03	146411.47	9,9168593	10,1655751
	30	82412,62	145500.90	9,9159937	10,1628657
	20	82247.51	144598,01	9,9151228	10,1601623
	10	82081,70	143702,68	9,9142464	10,1574649

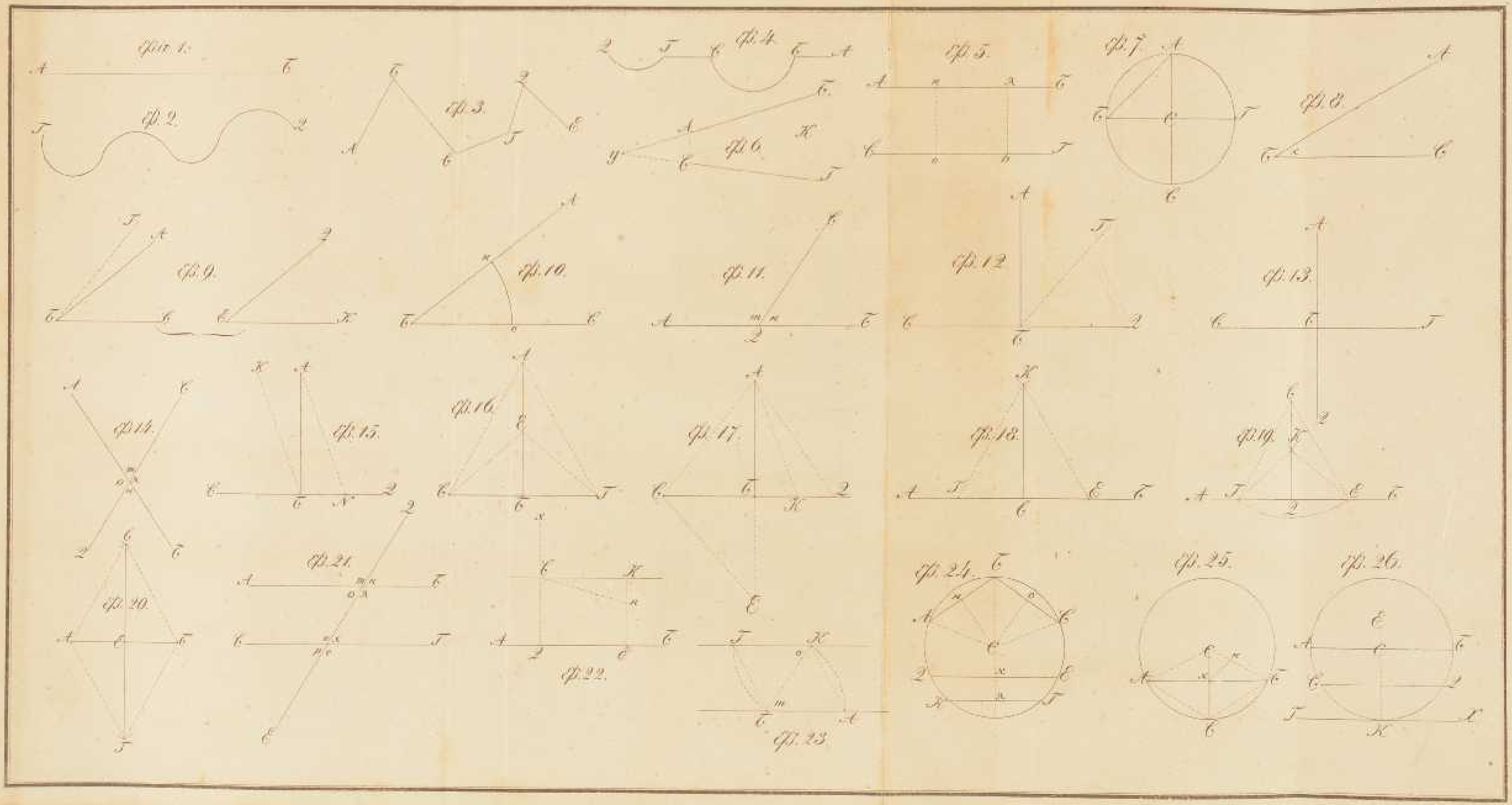
Степени.	Минута.	Нѣдри-ште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
35		57357,64	70020,75	9,7585913	9,8452268
	10	57595,68	70455,15	9,7603899	9,8479127
	20	57833,23	70891,33	9,7621775	9,8505931
	30	58070,30	71329,31	9,7639540	9,8532680
	40	58306,87	71769,11	9,7657197	9,8559376
	50	58542,94	72210,75	9,7674746	9,8586019
36		58778,53	72654,26	9,7692187	9,8612610
	10	59013,61	73099,63	9,7709522	9,8639152
	20	59248,19	73546,91	9,7726751	9,8665644
	30	59482,28	73996,11	9,7743876	9,8692089
	40	59715,86	74447,24	9,7760897	9,8718486
	50	59948,93	74900,33	9,7777815	9,8744838
37		60181,50	75355,40	9,7794630	9,8771144
	10	60413,56	75812,48	9,7811344	9,8797407
	20	60645,11	76271,57	9,7827958	9,8823627
	30	60875,14	76732,70	9,7844471	9,8849805
	40	61109,66	77195,89	9,7860886	9,8875942
	50	61336,66	77661,17	9,7877202	9,8902040
38		61566,15	78128,56	9,7893420	9,8928098
	10	61795,11	78598,08	9,7909541	9,8954119
	20	62023,55	79069,75	9,7925566	9,8930104
	30	62251,46	79543,59	9,7941496	9,9006052
	40	62478,85	80019,63	9,7957330	9,9031966
	50	62705,71	80497,90	9,7973071	9,9057845
39		62932,04	80978,40	9,7988718	9,9083692
	10	63157,84	81461,18	9,8004272	9,9106507
	20	63383,09	81946,25	9,8019735	9,9135291
	30	63607,82	82433,64	9,8035105	9,9161045
	40	63832,01	82923,37	9,8050385	9,9186769
	50	64055,66	83415,47	9,8065575	9,9212466
40		64278,76	83909,96	9,8080675	9,9238135
	10	64501,32	84406,88	9,8095686	9,9263778
	20	64723,34	84906,24	9,8110609	9,9289396
	30	64944,80	85408,07	9,8125444	9,9314989
	40	65165,72	85912,40	9,8140192	9,9340559
	50	65386,09	86419,26	9,8154854	9,9366105
41		65605,90	86928,68	9,8169429	9,9391631
	10	65825,16	87440,67	9,8183919	9,9417135
	20	66043,86	87955,28	9,8198325	9,9442619
	30	66262,01	88472,53	9,8212646	9,9468084
	40	66479,59	88992,45	9,8226883	9,9493531
	50	66696,61	89515,06	9,8241037	9,9518961

Степени.	Минута.	Нѣдриште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
54	60	81915,21	142814,80	9,9133645	10,1547732
	50	81748,01	141934,27	9,9124772	10,1520873
	40	81580,13	141060,98	9,9115844	10,1494069
	30	81411,55	140194,83	9,9106860	10,1467320
	20	81242,29	139335,71	9,9097821	10,1440624
	10	81072,33	138483,53	9,9088727	10,1413681
53	60	80901,70	137638,19	9,9079576	10,1387390
	50	80730,38	136799,59	9,9070370	10,1360848
	40	80558,37	135967,64	9,9061107	10,1334356
	30	80385,69	135142,24	9,9051787	10,1307911
	20	80212,32	134323,31	9,9042411	10,1281514
	10	80038,27	133510,75	9,9032977	10,1255162
52	60	79869,55	132704.48	9,9023486	10,1228856
	50	79688,15	131904,41	9,9013938	10,1202593
	40	79512,08	131110,46	9,9004331	10,1176373
	30	79335,33	130322,54	9,8994667	10,1150195
	20	79157,92	129540,57	9,8984944	10,1124058
	10	78979,83	128764,47	9,8975162	10,1097960
51	60	78801,07	127994,16	9,8965321	10,1071902
	50	78621,65	127229,57	9,8955422	10,1045881
	40	78441,57	126470,62	9,8945463	10,1019896
	30	78260,82	125717,23	9,8935444	10,0993948
	20	78079,40	124369,33	9,8925365	10,0968034
	10	77897,33	124226,85	9,8915226	10,0942155
50	60	77714,60	123489,72	9,8905026	10,0916308
	50	77531,21	122757,86	9,8894765	10,0890493
	40	77347,16	122031,21	9,8884444	10,0804709
	30	77162,46	121309,70	9,8874061	10,0838955
	20	76977,10	120593,27	9,8863616	10,0813231
	10	76791,10	119881,84	9,8853109	10,0787534
49	60	76604,44	119175,36	9,8842540	10,0761865
	50	76417,14	118473,76	9,8831908	10,0736222
	40	76229,19	117776,98	9,8821213	10,0710604
	30	76040,60	117084,96	9,8810455	10,0685011
	20	75851,36	116397,63	9,8799634	10,0659441
	10	75661,47	115714,95	9,8788748	10,0633895
48	60	75470,96	115036,34	9,8777799	10,0608369
	50	75279,80	114363,26	9,8766785	10,0582865
	40	75088,00	113694,14	9,8755706	10,0557381
	30	74895,57	113029,44	9,8744561	10,0531916
	20	74702,51	112369,09	9,8733352	10,0506469
	10	74508,81	111713,05	9,8722076	10,0481039

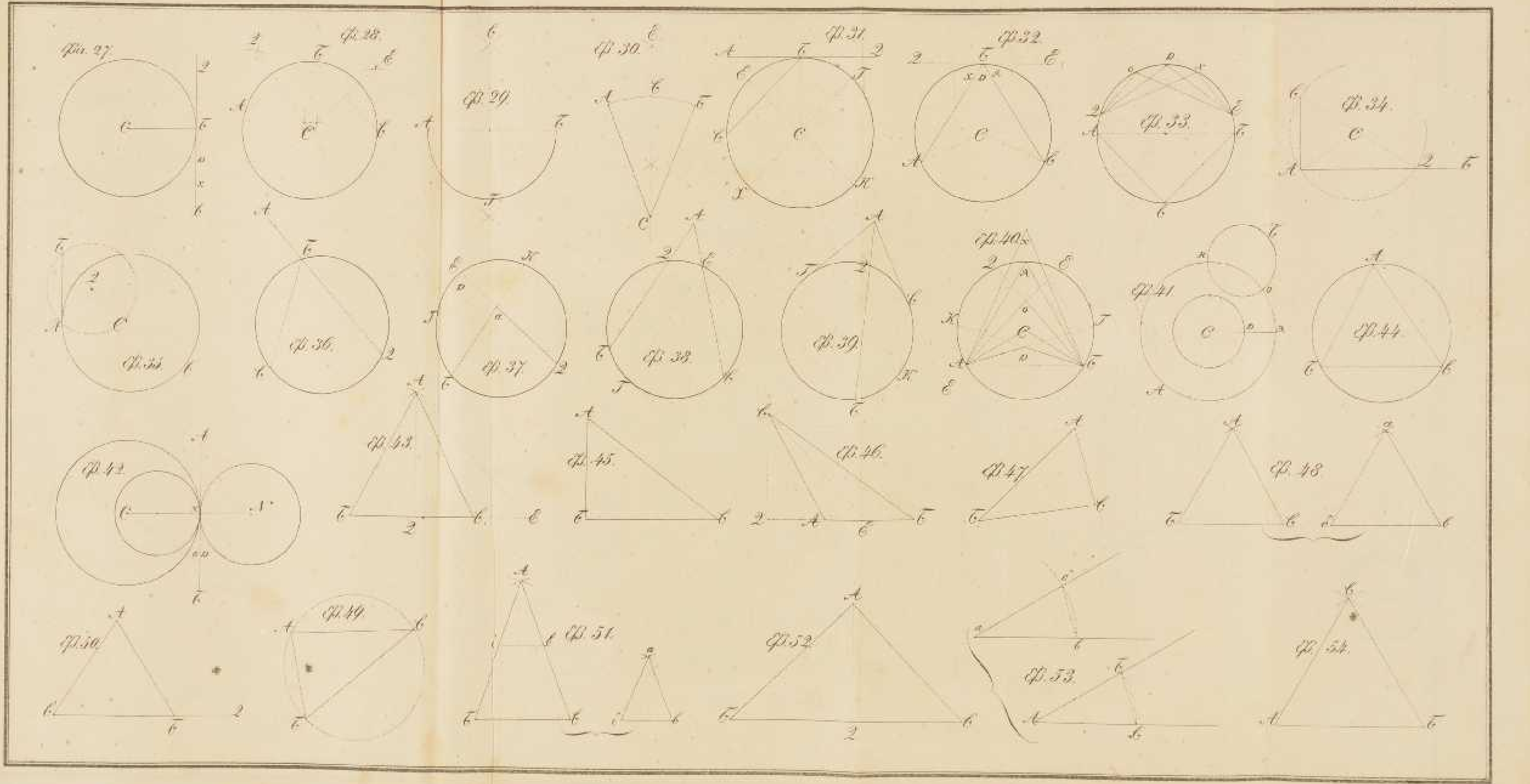
Степени. Минута.	Нѣдриште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
42	66913,06	90040,41	9,8255109	9,9544374
10	67128,95	90568,51	9,8269098	9,9569772
20	67344,27	91099,41	9,8283006	9,9595155
30	67559,02	91633,12	9,8296833	9,9620525
40	67773,20	92169,68	9,8310580	9,9645881
50	67986,81	92709,14	9,8324246	9,9671225
43	68199,84	93251,51	9,8337833	9,9696559
10	68412,29	93796,83	9,8351341	9,9721882
20	68624,16	94345,13	9,8364771	9,9747195
30	68835,45	94896,46	9,8378122	9,9772500
40	69046,17	95450,83	9,8391396	9,9797797
50	69256,30	96008,29	9,8404593	9,9823087
44	69465,84	96568,88	9,8417713	9,9848372
10	69674,79	97132,62	9,8430757	9,9873651
20	69883,15	97699,56	9,8443725	9,9898926
30	70090,93	98269,73	9,8456610	9,9924197
40	70298,10	98843,16	9,8469430	9,9949466
50	70504,69	99419,91	9,8482180	9,9974734
45	70710,68	100000,00	9,8494850	10,0000000

Степени.	Минута.	Нѣдриште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
47	60	74314,48	111061,25	9,8710735	10,0455626
	50	74119,53	110413,65	9,8699326	10,0430228
	40	73923,94	109770,20	9,8687851	10,0404845
	30	73727,73	109130,85	9,8676309	10,0379475
	20	73530,90	108495,54	9,8664699	10,0354119
	10	73333,45	107864,23	9,8653021	10,0328775
46	60	73135,37	107236,87	9,8641275	10,0303441
	50	72936,67	106613,41	9,8629466	10,0278118
	40	72737,36	105993,81	9,8617576	10,0252805
	30	72537,44	105378,01	9,8605622	10,0227500
	20	72336,90	104765,98	9,8593599	10,0202203
	10	72135,74	104157,67	9,8581505	10,0176913
45	60	71933,98	103553,03	9,8569341	10,0151628
	50	71731,61	102952,03	9,8557106	10,0126349
	40	71528,63	102354,61	9,8544799	10,0101074
	30	71325,05	101760,74	9,8532421	10,0075803
	20	71120,86	101170,37	9,8519970	10,0050534
	10	70916,07	100583,47	9,8507446	10,0025266
44	60	70710,68	100000,00	9,8494850	10,0000000

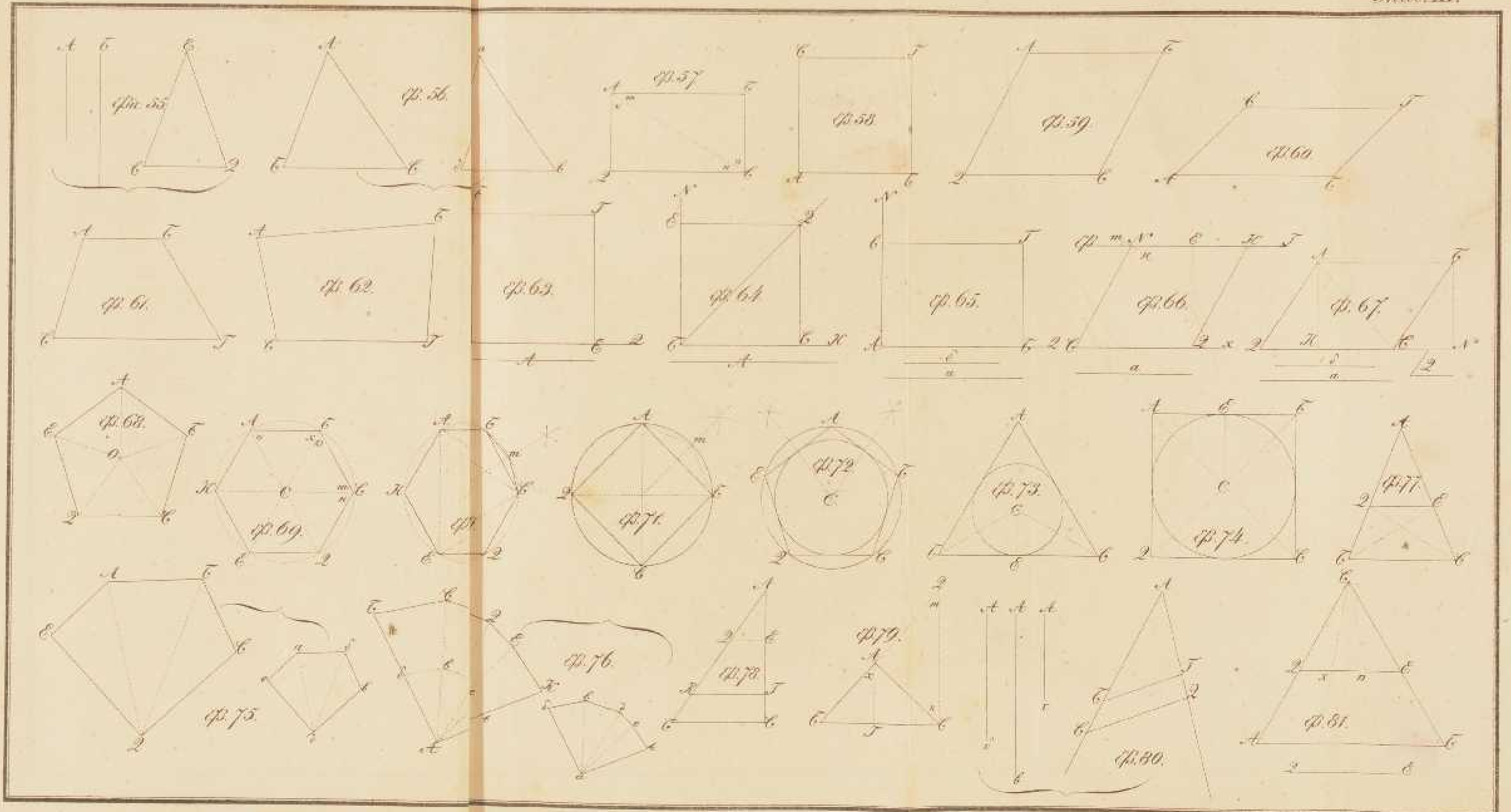
Таб. I.

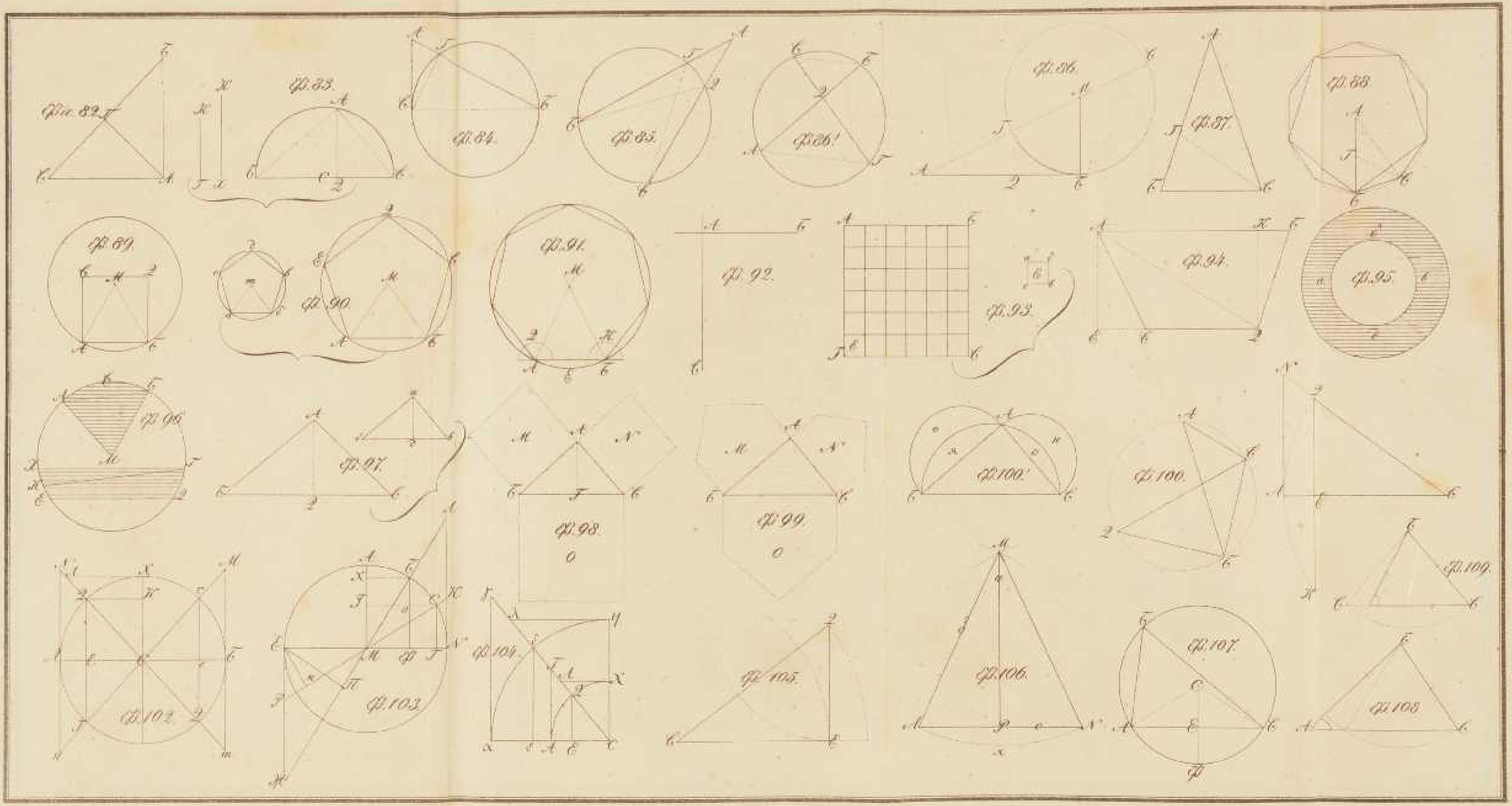


Таб. II

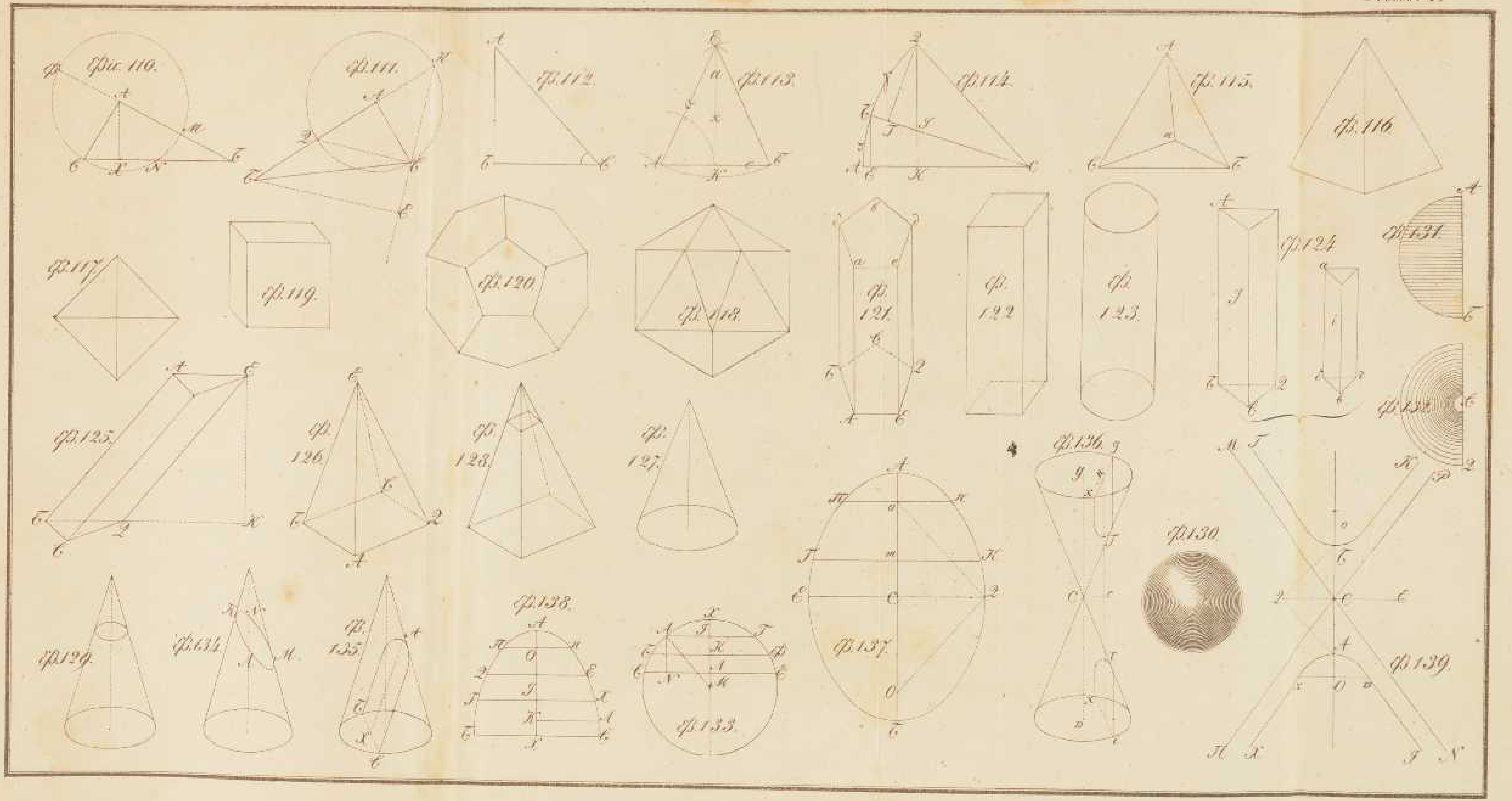

Фиг. 27
Ф. 28
Ф. 29
Ф. 30
Ф. 31
Ф. 32
Ф. 33
Ф. 34
Ф. 35
Ф. 36
Ф. 37
Ф. 38
Ф. 39
Ф. 40
Ф. 41
Ф. 42
Ф. 43
Ф. 44
Ф. 45
Ф. 46
Ф. 47
Ф. 48
Ф. 49
Ф. 50
Ф. 51
Ф. 52
Ф. 53
Ф. 54

Таб. III.




Фиг. 82.
Ф. 83.
Ф. 84.
Ф. 85.
Ф. 86!
Ф. 86.
Ф. 87.
Ф. 88.
Ф. 89.
Ф. 90.
Ф. 91.
Ф. 92.
Ф. 93.
Ф. 94.
Ф. 95.
Ф. 96.
Ф. 97.
Ф. 98.
Ф. 99.
Ф. 100!
Ф. 100.
Ф. 102.
Ф. 103.
Ф. 104.
Ф. 105.
Ф. 106.
Ф. 107.
Ф. 108.
Ф. 109.

Таб. V


Фиг. 110.
ф. 111.
ф. 112.
ф. 113.
ф. 114.
ф. 115.
ф. 116.
ф. 117.
ф. 119.
ф. 120.
ф. 118.
ф. 121.
ф. 122.
ф. 123.
ф. 124.
ф. 131.
ф. 125.
ф. 126.
ф. 128.
ф. 127.
ф. 132.
ф. 136.
ф. 137.
ф. 130.
ф. 129.
ф. 134.
ф. 135.
ф. 138.
ф. 133.
ф. 139.